ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Kardinal Sayılar ve Sayılabilirlik

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 8

Teorem 2.66 (X,d) metrik uzayının bütün açık yuvarlarının β ailesi, d metriğinin X üzerinde oluşturduğu topoloji için bir tabandır. (bkz Teorem 1.10)

İspat: $\beta = \{B(x,r) : x \in X \text{ ve } r > 0\}$ ailesinin teorem 2.64 deki (b_1),(b_2) şartlarını sağladığını göstermeliyiz.

$\forall x \in X$ ve $\forall r > 0$ için $x \in \beta(x,r) \subset X$ olduğundan $X = \bigcup_{x \in X} B(x,r)$ dır. Böylece (b_1) özelliği sağlanır.

Herhangi $B_1, B_2 \in \beta$ ve $B_1 \cap B_2 \neq \emptyset$ olsun $x \in B_1 \cap B_2$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda $x \in B_1$ ve $x \in B_2$ dır. Teorem 1.8 den

$\exists r_1 > 0$ sayısı var $\ni B(x,r_1) \subset B_1$ ve $\exists r_2 > 0$ sayısı var $\ni B(x,r_2) \subset B_2$ dır. $r = \min\{r_1, r_2\}$ olmak üzere $x \in \beta(x,r) \subset B_1 \cap B_2$ dır. x keyfi olduğundan

$$B_1 \cap B_2 = \bigcup_{x \in B_1 \cap B_2} B(x,r)$$

olarak yazılır. Böylece (b_2) özelliği sağlanır. O halde β açık yuvarların ailesi bir tabandır.

Örnek 2.67 R^2 üzerine alışılmış metrikle konulan (teorem 2.63 dekine benzer olarak) alışılmış topoloji için ;

i) R^2 deki bütün açık daireler (diskler),
ii) R^2 deki bütün açık eşkenar dörtgenler,
iii) R^2 deki kenarları koordinat eksenlere paralel olan bütün açık dikdörtgenler birer tabandır.

Teorem 2.68 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. β nın τ topolojisi için bir taban olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in X$ için $E(x) = \{E \in \beta : x \in E\}$ ailesinin x noktası için bir komşuluklar tabanı olmasıdır.

İspat : β, τ için bir taban olsun. Gösterelim ki $E(x)$, x in komşuluklar tabanıdır. Herhangi bir $x \in X$ için $N \in N(x)$ ise, tanım 2.10 dan $x \in U \subset N$ olacak şekilde bir $U \in \tau$ vardır. U açık kümesi β ya ait kümelerin bir birleşimine eşittir. O halde $x \in E \subset U$ olacak şekilde en az bir $E \in \beta$ vardır. Bu da $E \in E(x)$ olması demektir. Tanım 2.14 den $E(x)$, x in komşuluklar tabanıdır.

Tersine olarak her $x \in X$ için $E(x)$ in komşuluklar tabanı olduğunu kabul edelim ve gösterelim ki β,τ için bir tabandır. $U \in \tau$ herhangi bir eleman olsun. $\forall x \in U$ için $U \in N(x)$ dir. Komşuluklar tabanı tanımından $x \in V_x \subset U$ olacak şekilde $V_x \in E(x)$ var ve dolayısıyla $V_x \in \beta$ dır. Her $x \in U$ için $x \in V_x \subset U$ olduğundan $U = \bigcup_{x \in U} V_x$, $V_x \in \beta$ dır. O halde τ nun herhangi bir elemanı β ya ait elemanların birleşimi şeklinde yazıldığından β, τ için bir tabandır.

Tanım 2.69 (X,τ) bir topolojik uzay ve fl $\subset \tau$ olsun. fl ailesinin elemanlarının her sonlu kesişimlerinin oluşturduğu aile, τ için bir taban oluşturuyor ise, fl ailesine τ topolojisi için bir **alt taban** denir, yani,

$$\{ \bigcap_{A\in\varphi} A : \varphi \subset \text{fl}, \varphi \text{ sonlu}\}$$

ailesi τ topolojisi için bir taban ise, fl ailesi τ için bir alt tabandır.

Örnek 2.70 (R,τ_d) alışılmış topolojik uzay ve

$$\text{fl}=\{(-\infty,b),(a,\infty): a<b \text{ ve } a,b\in R\}$$

ailesi verilmiş olsun. fl ailesi R nın alışılmış topolojisi için bir alt tabandır. Gerçekten,

$$\{(-\infty,b)\cap(a,+\infty)=(a,b) : a<b \text{ ve } a,b\in R\}$$

ailesi Teorem 2.66 dan τ_d için bir tabandır. O halde fl bir alt tabandır.

Kardinal Sayılar ve Sayılabilirlik

X ve Y herhangi iki küme olsun. X den Y ye bire-bir ve örten bir f fonksiyonu varsa , X ve Y kümelerine elemanları sayısı bakımından denktir ya da **aynı kardinal sayıya sahiptir** denir. Herhangi bir X kümesinin kardinal sayısı, bu kümenin kardinalitesiyle belirlenir ve |X| ile gösterilir. O halde |X| = |Y| olması için gerek ve yeter şart X den Y ye bire-bir ve örten bir fonksiyonun olmasıdır (yani X ve Y equipotenttir). Bir X kümesi pozitif tamsayıların Y={1,2,3,...,n} alt kümesine sayısal olarak denkse (yani X ile Y aynı kardinaliteye sahipse), X kümesine sonlu küme denir. O halde sonlu bir X kümesinin kardinalitesi, bu kümenin elemanlarının sayısına eşittir. Ø küme sonlu bir küme olup, kardinalitesi 0 (sıfır) olarak kabul edilir. Sonlu olmayan bir kümeye sonsuz küme denir.

Bütün pozitif tam sayıların Z^+ kümesinin kardinal sayısı N_o (*alef sıfır:* Hebrew alfebesinin ilk harfi) ile gösterilir. Bütün reel sayılar kümesinin kardinal sayısı *C* (*continuum*) ile gösterilir.

Eğer bir X kümesi pozitif tam sayılar kümesiyle sayısal olarak denk, yani $|X| = |Z^+|$ ise , X kümesine **sayılabilir** sonsuz çoklukta elemana sahip küme denir.

Tanım 2.71 Bir küme sonlu veya *kardinalitesi* N_o (alef sıfır) ise, bu kümeye **sayılabilir küme**, aksi halde **sayılamaz küme** denir.

Örnek 2.72 Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir, fakat R reel sayılar kümesi sayılamaz kümedir.

X bir küme ve $|X| = n$ olsun. Bu durumda X ın bütün altkümelerinin P(X) ailesinin kardinalitesi 2^n dir. X ve Y iki küme $|X| = n$ ve $|Y| = m$ ise, X den Y ye bütün fonksiyonlarının kümesinin kardinalitesi m^n dır.

Karinal sayılarının oluşturduğu küme "$\leq$" olma bağıntısı ile iyi sıralı bir kümedir. O halde;

Tanım 2.73 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta_\tau = \{\beta\}$ ailesi τ nun bütün tabanlar ailesi olsun. Her $\beta \in \beta_\tau$ için $|\beta|$ kardinal sayılar kümesi iyi sıralı olduğundan bir en küçük elemanı **(e.k.e)** vardır. Bu sayıya (X,τ) topolojik uzayın **ağırlığı** (*weight*) denir ve $\omega(X,\tau)$ ile gösterilir, yani

$$\omega(X,\tau) = \text{e.k.e}\ \{|\beta| : \beta,\ \tau \text{ nun tabanı}\}$$

dır.

Tanım 2.74 (X,τ) bir topolojik uzay , $x \in X$ ve $\{E(x)\}$ x in komşuluklar tabanlarının bir ailesi olsun. $E(x)$ komşuluklar tabanlarının $|E(x)|$ kardinal sayılarının en küçük elemanına, **x noktasının karakteri** denir ve $\chi(x, (X,\tau))$ ile gösterilir, yani

$$\chi(x, (X,\tau)) = \text{e.k.e}\ \{|E(x)| : E(x),\ x \text{ in komşuluklar tabanı}\}$$

dır.

Her $x \in X$ noktasının $\chi(x, (X,\tau))$ karakterlerinin *supramumuna* (X,τ) **topolojik uzayın karakteri** denir ve $\chi(X,\tau)$ ile gösterilir, yani

$$\chi(X,\tau) = \operatorname{Sup}\{\chi(x, (X,\tau)) : x \in X\}$$

dır.

Tanım 2.75 (X,τ) bir topolojik olsun. Eğer $\chi(X,\tau)\leq \aleph_o$ ise , (X,τ) topolojik uzayına **birinci sayılabilir uzay** denir. Diğer bir deyimle, (X,τ) topolojik uzayının her noktasının sayılabilir bir komşuluklar tabanı varsa, uzaya birinci sayılabilir denir.

Örnek 2.76 (X,d) bir metrik uzay ve $x\in X$ herhangi bir nokta olsun. Örnek 2.16 dan $\{B(x,\frac{1}{n}):n\in N\}$ ailesi x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. Diğer taraftan bu ailenin her bir elemanı doğal sayılar tarafından indislendiğinden aile sayılabilir , yani bu aile ile pozitif tam sayılar arasında bire-bir bir eşleme vardır. O halde (X,d) metrik uzayı birinci sayılabilir uzaydır.

Sonuç olarak her metrik uzay birinci sayılabilir bir uzaydır. Böylece $R^1,R^2,\ldots,R^n$ birer metrik uzay olduklarından, birinci sayılabilir uzaylardır. Ayrıca metrikle oluşturulan topoloji ile birlikte topolojik uzay da birinci sayılabilir uzaydır.

Örnek 2.77. $(X,P(X))$ ayrık bir uzay olsun. Örnek 2.15 den $\forall x \in X$ için $E(x)= \{x\}$ ailesi, x noktasının komşuluklar tabanıdır. Üstelik sayılabilir olduğundan ayrık her uzay birinci sayılabilir bir uzaydır.

Teorem 2.78 (X,τ) bir topolojik uzay ve her $x \in X$ noktası için $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ sayılabilir komşuluklar tabanı olsun. Bu durumda x noktasının iç-içe azalan $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ komşuluklar tabanı vardır.

İspat: Komşuluklar tabanının iç-içe azalması, $\forall n \in N$ için $V_{n+1} \subset V_n$ dır. Eğer $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ iç-içe azalansa, ispat açıktır. $W_1, W_2, \ldots, W_n, \ldots$ iç-içe azalmıyorsa ,

$$V_1 = W_1, V_2 = W_1 \cap W_2, \ldots, V_n = W_1 \cap W_2 \cap \ldots \cap W_n, \ldots$$

şeklinde tanımlanan $V_1, V_2, \ldots, V_n, \ldots$ ailesi (dizisi) hem iç-içe azalan ve hem de x noktasının komşuluklar tabanıdır.

Örnek 2.79 (R,d) alışılmış metrik uzay olsun. $\forall x \in R$ için

$$B(x,1), B(x,\tfrac{1}{2}), \ldots, B(x,\tfrac{1}{n}), \ldots$$

komşuluklar tabanı iç-içe azalandır.

Tanım 2.80 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Eğer

$$\omega(X,\tau) \leq N_o$$

ise, (X,τ) uzayına **ikinci sayılabilir uzay** denir. Diğer bir deyimle, (X,τ) uzayı sayılabilir bir tabana sahipse, uzaya ikinci sayılabilir uzay denir.

Örnek 2.81 (R,τ) alışılmış topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\beta' = \{(q,r) : q, r \in Q, q < r\}$$

ailesi R için bir tabandır. Ayrıca Q rasyonel sayılar kümesi sayılabilir olduğundan R ikinci sayılabilir bir uzaydır. Şimdi β'nın bir taban olduğunu gösterelim:

$A \subset R$ herhangi bir açık olsun. Teorem 2.63 den $A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x)$ dır. O halde $\forall x \in A$ için $a_x < x < b_x$ dır. Reel sayıların *Archiemed* sınırlı olduğundan $a_x < q_x < x$ ve $x < r_x < b_x$ olacak şekilde q_x ve r_x rasyonal sayıları vardır. O halde $\forall x \in A$ için $q_x < x < r_x$ dır. Bu da

$$A = \bigcup_{x \in A} (q_x, r_x)$$

olması demektir. Böylece β', τ topolojisi için bir tabandır. Teorem 2.63'de $\beta = \{(a,b) : a,b \in R, a < b\}$ ailesinin R nın alışılmış topolojisi için bir taban olduğu ifade edilmişti. Reel sayılar kümesi sayılamaz çoklukta olduğundan β tabanı sayılamaz. Ayrıca R üzerine konulan ayrık topolojiye göre

$$\beta'' = \{\{x\} : x \in R\}$$

ailesi de bir taban olup sayılamaz çoklukta elemana sahiptir, yani $(R, P(R))$ ikinci sayılamaz uzaydır. Fakat birinci sayılabilir bir uzaydır.

Teorem 2.82 İkinci sayılabilir her uzay, birinci sayılabilir uzaydır.

İspat: (X,τ) uzayı ikinci sayılabilir bir uzay olsun. Bu durumda $\omega(X,\tau) \leq N_o$ dır. Yani $\exists\ \beta$ tabanı var $\ni |\beta| \leq N_o$ dır. Teorem 2.68 den $x \in X$ noktasının $E(x)$ komşuluklar tabanı, β nın bir alt ailesidir. O halde

$$E(x) \subset \beta \Rightarrow |E(x)| \leq |\beta| \leq N_o \Rightarrow |E(x)| \leq N_o$$

dır. Böylece (X,τ) uzayı birinci sayılabilir bir uzaydır.

Teorem 2.83 (X,τ) ikinci sayılabilir bir topolojik uzay ve $A \subset X$ sayılamaz bir altküme olsun. Bu durumda $\exists x \in A'$ var $\ni x \in A$ dır.

İspat: β ailesi τ için sayılabilir bir taban ve $A \cap A' = \emptyset$ olsun. Bu durumda $\forall x \in A$ için $\exists V_x \in \tau$ açık komşuluğu var $\ni (V_x \setminus \{x\}) \cap A = \emptyset$ dır. β bir taban olduğundan $A \cap B_x = \{x\}$ olacak şekilde bir $B_x \in \beta$ vardır. O halde A dan β ya, x i B_x e dönüştüren bire-bir f fonksiyonu vardır. β sayılabilir olduğundan A nın da sayılabilir olması gerekir. Halbuki A sayılamaz bir küme idi. Bu çelişki $A \cap A' = \emptyset$ almakla ortaya çıktı. Böylece $A \cap A' \neq \emptyset$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Kardinal Sayılar ve Sayılabilirlik

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 8