ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Yoğun Küme ve Topoloji Tabanı

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 7

Tanım 2.49 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A^c kümesinin bir iç noktasına A nın bir **dış noktası** denir. A nın bütün dış noktalarının kümesine A nın **dışı** denir ve $\overset{\circ}{A^c}$ ile gösterilir.

Tanım 2.50 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin içine ve dışına ait olmayan noktaların kümesine A nın **sınırı** denir ve (veya $x \in X$ noktasının istenildiği kadar küçük bir komşuluğu alındığında, bu komşuluk içinde hem A nın içine hem de A nın dışına ait noktalar bulunuyorsa, x noktasına A nın bir **sınır noktası** denir ve bütün sınır noktalarının kümesi)

$$\partial A = \{x \in X : x \notin \overset{\circ}{A} \text{ ve } x \notin \overset{\circ}{A^c}\}$$

ile gösterilir.

Teorem 2.51 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $A \subset X$ için

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

dır.

İspat: Tanım 2.50'den $\partial A = \{x \in X : x \notin \mathring{A} \text{ ve } x \notin \mathring{(A^c)}\}$ dır. Teorem 2.45 (ii) den $\mathring{(A^c)} = \bar{A}^c$ dır. O halde

$$\partial A = \{x \in X : x \notin \mathring{A} \text{ ve } x \notin \bar{A}^c\} = \{x \in X : x \notin \mathring{A} \text{ ve } x \in \bar{A}\} = \bar{A} \setminus \mathring{A}.$$

Diğer taraftan teorem 2.45 (i) den $\mathring{A}^c = \overline{A^c}$ dır. O halde

$$\partial A = \{x \in X : x \in \mathring{A}^c \text{ ve } x \in \bar{A}\} = \{x \in X : x \in \overline{A^c} \text{ ve } x \in \bar{A}\} = \bar{A} \cap \overline{A^c}$$

bulunur.

Sonuç 2.52 $\partial A = \bar{A} \cap \overline{A^c}$ kümesi, (X,τ) topolojik uzayının kapalı bir altkümesidir. Çünkü kapalı iki kümenin ara kesiti, teorem 2.9 (k_2) den kapalıdır.

Örnek 2.53. $(X,P(X))$ ayrık uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın içini, dışını ve sınırını bulalım.

Çözüm: $A \subset X$ olduğundan A hem açık hem de kapalıdır, yani

$$A=\overset{\circ}{A}=\bar{A}$$

dır. O halde A nın içi $\overset{\circ}{A}=A$ dır. Diğer taraftan A nın dışı $\overset{\circ}{A^c}$ idi. X ayrık uzay ve $A^c \subset X$ olduğundan A^c açıktır. O halde A nın dışı $\overset{\circ}{A^c}=A^c$ dır. Ayrıca A nın sınırı ise, $\partial A=\bar{A}\setminus\overset{\circ}{A}=A\setminus A=\emptyset$ olur.

Örnek 2.54. R üzerinde alışılmış d metriğin koymuş olduğu τ_d topoloji olsun. $A = (-1,2] \cup \{3,4,5\} \subset IR$ altkümesinin bu topolojiye göre içini, kapanışını ve sınırını bulalım.

Çözüm: $-1 \notin A$ olduğundan $-1 \notin \overset{\circ}{A}$ dır. $x \in A$ ve $-1 < x < 2$ olsun. Bu durumda $\exists r > 0$ sayısı için $N = (x-r, x+r) \in N(x)$ var $\ni x \in N \subset A$ dır. O halde $x \in \overset{\circ}{A}$ dır.

$2 \in \overset{\circ}{A}$? $\forall r > 0$ sayısı için $N = (2-r, 2+r) \not\subset A$ olduğundan $2 \notin \overset{\circ}{A}$ dır. Benzer şekilde gösterilir ki 3,4 ve 5 $\notin \overset{\circ}{A}$ dır. O halde A nın içi $\overset{\circ}{A} = (-1,2)$ açık aralığıdır. Tanım 2.43'e göre A nın içini şöyle de bulabiliriz. A kümesinin kapsadığı en geniş açık altkümesi $(-1,2)$ açık aralığı olduğundan A nın içi $\overset{\circ}{A} = (-1,2)$ dır.

$\bar{A}$ bulmak için, A nın değme noktalarını bulmak yeterlidir. $-1 < x \leq 2$ için $x \in A$ ve 3,4 ve $5 \in A$ olması, tanım 2.18 e göre A nın değme noktalarıdır.

$\forall r > 0$ sayısı ve $N = (-1-r, -1+r) \in N(-1)$ için $N \cap A \neq \emptyset$ olduğundan -1, A nın bir değme noktasıdır. Böylece A nın bütün değme noktalarının kümesi $[-1,2] \cup \{3,4,5\}$ dır, yani

$$\bar{A} = [-1,2] \cup \{3,4,5\}$$

olur. Tanım 2.29'a göre A'yı kapsayan en küçük kapalı altküme $[-1,2] \cup \{3,4,5\}$olduğundan

$$\bar{A} = [-1,2] \cup \{3,4,5\}$$

olur. Son olarak A nın sınırı,

$$\partial A = \bar{A} \setminus \mathring{A} = \bar{A} = [-1,2] \cup \{3,4,5\} \setminus (-1,2) = \{-1,2,3,4,5\}$$

olarak bulunur.

Örnek 2.55 X= {a,b,c,d,e} kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{c,d\},\{a,c,d\},\{b,c,d,e\}\}$$

ve A= {b,c,d} $\subset$ X bir altkümesi olsun. A nın içini, dışını ve sınırlarını bulalım.

Çözüm: $\overset{\circ}{A}$=?. Bu topolojiye göre A nın kapsadığı en geniş açık küme {c,d} olduğundan $\overset{\circ}{A}=\{c,d\}$ dır.

$\overset{\circ}{A^c}$=? A={b,c,d}$\Rightarrow A^c$ = {a,e} dır. Bu topolojiye göre A^c nin kapsadığı en geniş açık küme {a} olduğundan $\overset{\circ}{A^c}=\{a\}$ dır.

A kümesinin sınırı, A nın içine ve dışına ait olmayan noktaların kümesi olarak tanımlandığından

$$\partial A=\{x\in X: x\notin \overset{\circ}{A} \text{ ve } x\notin \overset{\circ}{A^c}\}=\{b,e\} \text{ olur.}$$

Tanım 2.56 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A ya **kendi içinde yoğundur** denir ancak ve ancak $A \subset A'$ ise.

Tanım 2.57 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A ya **mükemmel** (perfect) **bir küme** denir ancak ve ancak $A=A'$ ise.

Teorem 2.58 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A nın mükemmel bir küme olması için gerek ve yeter şart A nın kendi içinde yoğun ve kapalı olmasıdır.

İspat: A mükemmel olsun. Tanım 2.57 den $A=A'$ dır. $A \subset A'$ olduğunda A kendi içinde yoğundur. Ayrıca A bütün yığılma noktalarını kapsadığı için teorem 2.29 dan A kapalıdır.

Tersini olarak A kendi içinde yoğun ve kapalı olsun. A kendi içinde yoğun olduğundan $A \subset A'$ dır. A kapalı olmasından bütün yığılma noktalarını kapsar, yani $A' \subset A$ dır. O halde $A=A'$ bulunur. Bu da A nın mükemmel olması demektir.

Tanım 2.59 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $\bar{A}=X$ ise, A kümesine X uzayında **her yerde yoğun** denir. Eğer $\overset{o}{\bar{A}} = \varnothing$ ise, A ya hiçbir yerde **yoğun değil** denir.

Örnek 2.59 R, alışılmış d metriğinin oluşturduğu τ_d topolojisiyle birlikte bir topolojik uzay ve $Q, I \subset R$ olsun. Bu durumda Q ve I, R de her yerde yoğundur. Gerçekten, örnek 2.28'den $Q' = R$ ve $I' = IR$ dır. Diğer taraftan

$$\bar{Q} = Q \cup Q' = IR \text{ ve } \bar{I} = \bar{I} \cup I' = R$$

olduğundan Q ve I, R de her yerde yoğundur.

Örnek 2.60 $(X,\tau=\{\emptyset,X\})$ kaba topolojik uzay olsun. X in boştan farklı her altkümesi X de yoğundur. Gerçekten, A, X in herhangi bir altkümesi ise, A'yı kapsayan tek kapalı alt küme X olduğundan $\bar{A}=X$ dır.

Teorem 2.61 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesinin X topolojik uzayında her yerde yoğun olması için gerek ve yeter şart X uzayının boş olmayan her U açık kümesi için $U \cap A \neq \emptyset$ olmasıdır.

İspat: A,X de her yerde yoğun olsun. Bu durumda X in her noktası A nın bir değme noktasıdır (teorem 2.31). Değme noktası tanımından

$$\forall x \in X,\ \forall U \in N(x) \text{ açık için } U \cap A \neq \emptyset$$

dır.

Tersine olarak $\forall x \in X$ ve $\forall U \in N(x)$ açık için $U \cap A \neq \emptyset$ olsun. Bu durumda X in her elamanı A nın bir değme noktasıdır, yani $x \in \bar{A}$ dır. Böylece $X \subset \bar{A}$ dır. Diğer taraftan $A \subset X$ için teorem 2.30 (v) den $\bar{A} \subset \bar{X} = X$ dır. O halde $\bar{A} = X$ bulunur. Bu da A nın X de her yerde yoğun olması demektir.

Topoloji Tabanı ve Alt Tabanı

Vektör uzayı hakkında bilgisi olan herkes , vektör uzayının her bir elemanının vektör uzayın bazı (tabanı) diye adlandırılan vektörlerle ifade edilebileceğini bilir. Topolojik uzaylarda da vektör uzayındaki bu kavrama, gördüğü iş bakımından benzer olan bir kavramın varlığı akla gelebilir. Yani boştan farklı bir X kümesi üzerinde tanımlanan herhangi bir τ topolojisinin her bir elemanını belirlemeye yetecek bir alt aile var mıdır? Bu soruya cevap olarak aşağıdaki tanımı verelim.

Tanım 2.62 (X,τ) bir topolojik uzay ve $\beta \subset \tau$ olsun. τ topolojisinin her elemanı β nın elemanlarının her hangi bir birleşimi olarak yazılabiliyor ise, β ya τ topolojisinin bir **tabanı** (bazı) denir, yani

$$\beta,\tau \text{ için bir taban} \Leftrightarrow \forall A\in\tau \text{ için } \exists\theta\subset \beta \text{ alt ailesi var } \ni A=\bigcup_{B\in\theta} B \text{ veya,}$$

$$\beta,\tau \text{ için bir taban} \Leftrightarrow \forall A\in\tau \text{ ve } \forall a\in A \text{ için } \exists B_a\in \beta \text{ var } \ni A=\bigcup_{a\in A} B_a \text{ dır.}$$

Bu tanıma göre X üzerindeki τ topolojisi, β tabanının elemanları cinsinde yazılabilir, yani $\tau=\{\bigcup_{B\in\theta} B : \theta\subset\beta\}$ dır.

Bu tanıma örnek olması ve R üzerinde tanımlanan alışılmış d metriğinin, R üzerine koyduğu τ_d metrik topolojisini net bir şekilde ifade edelim. Örnek 1.6'da R'nın herhangi bir x noktasının d alışılmış metriğe göre r-komşuluğu (açık yuvarı)

$$B(x,r) = \{y \in R: d(x,y) = |y-x| < r\} = (x-r, x+r)$$

şeklinde tanımlanmıştı. Ayrıca teorem 1.8 de her açık yuvarın (açık aralığın) açık küme olduğu gösterilmiş ve tanım 1.7 de metrik uzaylar da açık altküme tanımı verilmişti. O halde aşağıdaki teoremi ifade edebiliriz:

Teorem 2.63 R reel sayılar kümesinin altkümelerinden açık aralıkların birleşimi şeklinde tanımlanabilenlerin

$$\tau_d = \{A \subset R : A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x),\ x \in (a_x, b_x) \text{ ve } a_x, b_x \in R\}$$

ailesi, R üzerinde bir topoloji oluşturur.

Sonuç olarak τ_d, R üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye R üzerindeki alışılmış metriğin oluşturduğu **metriksel topoloji** veya R nın **alışılmış topolojisi** denir. τ_d nin tanımlanmasında görüldüğü gibi τ_d nin her bir elemanı açık aralıkların birleşimi şeklinde yazılmaktadır. Dolayısıyla açık aralıkların $\beta = \{(a,b) : a,b \in R\}$ ailesi τ_d için bir tabandır.

Teorem 2.64 (X,τ) bir topolojik uzay ve β, τ nun bir tabanı olsun. Bu durumda β ailesi (taban olma şartları olarak bilinen) aşağıdaki şartları sağlar:

b_1) X uzayı, β nın elemanlarının birleşimine eşittir, yani $X = \bigcup_{B\in\beta} B$,

b_2) β nın herhangi iki elemanının kesişimi, β nın elemanlarının bir birleşimine eşittir, yani herhangi $B_1,B_2 \in \beta$ ve $\forall p\in B_1\cap B_2$ için $\exists B_p\in \beta$ var $\ni$ $p\in B_p\subset B_1\cap B_2$ dır. Veya $B_1\cap B_2= \bigcup_{p\in B_1\cap B_2} B_p$,$B_p\in\beta$ dır.

İspat:

(b_1) β, τ için bir taban ve $X\in\tau$ olduğu için, tanım 2.62 den $X= \bigcup_{B\in\beta} B$ dir.

(b_2) Herhangi $B_1, B_2 \in \beta$ olsun. $\beta \subset \tau$ olduğundan $B_1 ,B_2 \in\tau$ dır. (t_2) den $B_1\cap B_2\in\tau$ dır. Tanım 2.62 den $B_1\cap B_2$ kümesi β ya ait elemanların birleşimi olarak yazılabilir.Yani, $B_1\cap B_2 = \bigcup_{p\in B_1\cap B_2} B_p$, $B_p\in\beta$ veya $\exists$ $B_p\in\beta \ni p\in B_p\subset B_1\cap B_2$ olur.Böylece (b_2) sağlanır.

Örnek 2.65 $(X,P(X))$ ayrık topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\beta = \{\{x\}: x\in X\}$$

ailesi $P(X)$ topolojisi için bir tabandır.

UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Yoğun Küme ve Topoloji Tabanı

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 7