ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

İç İşlem

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 6

Teorem 2.35 (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. d metriğine göre A kümesine uzaklıkları sıfır olan X in noktalarının kümesi A nın kapanışına eşittir, yani

$$\bar{A}=\{x\in X: d(x,A)=0\}$$

dır.

İspat: $x\in\bar{A}$ alalım ve gösterelim ki $d(x,A)=0$ dır. Aksini kabul edelim, yani $d(x,A)= r > 0$ olsun. Bu durumda

$$B(x,\tfrac{1}{3}r) = \{y\in X : d(x,y) < \tfrac{1}{3}r\}$$

açık yuvarı A nın hiçbir noktasını içermez , yani $B(x,\frac{1}{3}r)\cap A = \emptyset$ dır. Sonuç 2.33 den $x\notin\bar{A}$ olur. Bu $x\in\bar{A}$ olmasıyla çelişir. O halde $d(x,A) = 0$ dır, yani

$$x\in\bar{A}\Rightarrow \{x\in X : d(x,A)=0\} \qquad (1)$$

Şimdi $d(x,A) = 0$ alalım ve gösterelim ki $x \in \bar{A}$ dır. $d(x,A) = 0$ olması ve $d(x,A)=\inf\{d(x,y) : y \in A\}$ tanımından

a) $x \in A$ dır. Böylece $x \in \bar{A}$ olur.

b) $x \notin A$ ise , Her $r > 0$ sayısı için $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$ açık yuvarı A nın en az bir noktasını içerir. O halde $x \in A'$ dır. $\bar{A} = A \cup A'$ olmasından da $x \in \bar{A}$ olur. Böylece

$$\{x \in X : d(x,A) = 0\} \Rightarrow x \in \bar{A} \qquad (2)$$

dır.

Sonuç olarak (1) ve (2) den

$$\bar{A} = \{x \in X : d(x,A) = 0\}$$

dır.

Sonuç 2.36 (X,d) metrik uzayında bütün sonlu altkümeler kapalıdır.

İspat: $A=\{a\}$ tek elemanlı bir kümeye uzaklıkları sıfır olan noktaların kümesi , tek elemanlı A kümesidir. Gerçekten,

$$d(x,A) = d(x,\{a\}) = d(x,a) = 0 \Rightarrow x=a$$

dır. Teorem 2.35 den $\bar{A}=\{a\}=A$ olup, A kapalıdır.

Eğer $A=\{a_1, a_2,\dots,a_n\} \subset X$ sonlu herhangi bir altkümesi olsun. A kümesi tek elemanlı kapalı kümelerin birleşimi olarak yazılabilir, yani

$$A=\{a_1\} \cup \{a_2\} \cup \dots \cup \{a_n\}$$

dır. O halde sonlu sayıdaki kapalıların birleşimi (k_2 den) kapalı olduğundan A kapalıdır.

Sonuç 2.37 (X,d) metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

$$A \text{ kapalı} \Leftrightarrow \{x \in X : d(x,A) = 0\} \subset A$$

olmasıdır.

İspat: A kapalı olsun. Teorem 2.30 (iv) den $A=\bar{A}$ ve teorem 2.35 den de $\bar{A}=\{x\in X: d(x,A)=0\}\subset A$ olur.

Tersine olarak $\{x\in X : d(x,A) = 0\} \subset A$ olsun. Teorem 2.35 den $\bar{A}\subset A$ olur. Teorem 2.30 (ii) den $A\subset\bar{A}$ dır. O halde $A=\bar{A}$ olur. A kapalı

Teorem 2.38 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Bu durumda

$$\bar{\emptyset}=\emptyset$$

dır.

İspat: Ø kümenin hiçbir yığılma noktası olmadığından,teorem 2.32 den

$$\bar{\emptyset}=\emptyset$$

dır.

Teorem 2.39 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A_1,A_2,\ldots,A_n \subset X$ olsun. Bu durumda

$$(\overline{A_1\cup A_2\cup\ldots\cup A_n}) = \bar{A}_1\cup\bar{A}_2\cup\ldots\cup\bar{A}_n.$$

İspat: $i = 1,2,\ldots,n$ için $\bar{A}_i = A_i \cup A_i'$ dir. O halde

$$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n = (A_1 \cup A_1') \cup (A_2 \cup A_2') \cup \ldots \cup (A_n \cup A_n')$$

$$= (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup (A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n')$$

olur. Teorem 2.26 dan

$$(A_1' \cup A_2' \cup \ldots \cup A_n') = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)'$$

olduğundan

$$\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n = (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) \cup (A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n)' = (\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n})$$

bulunur.

Uyarı: Kapanış işlemi toplamsal değildir, yani

$$\overline{\bigcup_{i=1}^{\infty} A_n} \neq \bigcup_{i=1}^{\infty} \bar{A}$$

Sonuç 2.40 (X,τ) bir topolojik uzayında kapanış işlemi (**Kuratowski kapanış aksiyomları** olarak ta adlandırılan) aşağıdaki özellikleri sağlar:

$K_1)$ $\bar{\varnothing} = \varnothing$, $K_2)$ $A \subset \bar{A}$, $K_3)$ $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$, $K_4)$ $\bar{A}_1 \cup \bar{A}_2 \cup \ldots \cup \bar{A}_n = (\overline{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n})$

Tanım 2.41 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. $x \in \bar{A}$ noktasına A nın bir **kapanış noktası** denir.

Teorem 2.42 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \in \tau$ olsun. Bu durumda her B $\subset X$ için

$$A \cap \bar{B} \subset (\overline{A \cap B}) \text{ dır.}$$

İspat: $x \in A \cap \bar{B}$ herhangi bir nokta ise, $x \in \bar{B}$ dır. Teorem 2.31 den x, B nın bir değme noktasıdır. O halde $\forall N \in N(x)$ komşuluğu için $x \in (N \cap A) \in N(x)$ dır. $N \cap A \in N(x)$ olduğundan

$$(N \cap A) \cap B = N \cap (A \cap B) \neq \emptyset \Rightarrow x \in (\overline{A \cap B})$$

bulunur. Böylece $A \cap \bar{B} \subset (\overline{A \cap B})$ dır.

İç İşlem

Tanım 2.43 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın bütün açık alt kümelerin birleşimine A nın **içi** denir ve $\overset{\circ}{A}$ ile gösterilir, yani

$$\overset{\circ}{A} = \cup \{V \subset X : V \subset A \text{ ve } V \in \tau\}$$

Teorem 2.44 (X,τ) bir topolojik uzay, $B, A \subset X$ ve $\overset{\circ}{A}$, A nın içi olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

i) $\overset{\circ}{A}$ açıktır;

ii) $\overset{\circ}{A} \subset A$,

iii) $\overset{\circ}{A}$ kümesi A nın kapsadığı en geniş açık alt kümedir,

iv) A kümesinin açık olması için gerek ve yeter şart $A = \overset{\circ}{A}$ olmasıdır,

v) $A \subset B \Rightarrow \overset{\circ}{A} \subset \overset{\circ}{B}$,

vi) $\overset{\circ}{\overset{\circ}{A}} = \overset{\circ}{A}$,

vii) $(A \cap B)^{o} = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$.

İspat:

i) $\mathring{A}$ açıktır. Gerçekten, τ ya ait açıkların birleşimi tanım 2.1 (t_3) özelliğinden açıktır.

ii) $\mathring{A} \subset A$ olması tanım 2.43 ten açıktır.

iii) Aksini kabul edelim, yani A nın kapsadığı $\mathring{A}$ dan daha geniş açık bir küme V' olsun. Yani $\mathring{A} \subset V' \subset A$ dır. Diğer taraftan $\forall V \subset A$ açığı için tanım 2.43 ten $V \subset \mathring{A}$ dır. Özel olarak $V=V'$ için de $V' \subset \mathring{A}$ dır. O halde $V' = \mathring{A}$ olur. Böylece $\mathring{A}$, A nın kapsadığı en geniş açık altkümedir.

iv) A açık olsun. Gösterelim ki $\mathring{A}=A$ dır. (ii) den $\mathring{A} \subset A$ dır. Diğer taraftan A açık olduğundan $A \subset A$ olup, (iii) den $A \subset \mathring{A}$ dır. O halde $A=\mathring{A}$ dır.

Tersine olarak $A=\mathring{A}$ olsun. $\mathring{A}$ açık olduğundan A açıktır.

v) $A \subset B$ ve $\mathring{A} \subset A$ olduğundan $\mathring{A} \subset B$ dır. (ii) den $\mathring{B} \subset B$ dır. (iii) den B nın kapsadığı en geniş açık altküme $\mathring{B}$ olduğundan $\mathring{A} \subset \mathring{B} \subset B$ olur. O halde $\mathring{A} \subset \mathring{B}$ bulunur.

vi) $B = \mathring{A}$ olsun. (i) ve (iv) den $B = \mathring{B}$ olur. O halde $\mathring{A} = \mathring{\mathring{A}}$ dır.

vii) $A\cap B \subset A$ ve $A\cap B \subset B$ dır. (v) den $(A\cap B)^o \subset \overset{o}{A}$, $(A\cap B)^o \subset \overset{o}{B}$ dır. O halde

$$(A\cap B)^o \subset \overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \qquad (1)$$

dır. Diğer taraftan (ii) den $\overset{o}{A} \subset A$ ve $\overset{o}{B} \subset B$ dır. Buradan $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset A\cap B$ bulunur. $\overset{o}{A}, \overset{o}{B}$ açık ve tanım2.1 in (t_2) den $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B}$ açık ve $A\cap B$ tarafından kapsanır. (iii) den $A\cap B$ nın kapsadığı en geniş açık $(A\cap B)^o \subset (A\cap B)$ olduğundan $\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset (A\cap B)^o \subset (A\cap B)$ dır. O halde

$$\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} \subset (A\cap B)^o \qquad (2)$$

dır. Böylece

$$\overset{o}{A} \cap \overset{o}{B} = (A\cap B)^o$$

bulunur.

Uyarı: $(A\cup B)^o \neq \overset{o}{A} \cup \overset{o}{B}$ olmak zorunda değildir. Fakat $\overset{o}{A} \cup \overset{o}{B} \subset (A\cup B)^o$ dır.

Teorem 2.45 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

i) $\overset{\circ}{A}{}^c = \overline{A^c}$ ii) $\overset{\circ}{A^c} = \overline{A}{}^c$.

İspat:

i) Tanım 2.43 ten $\overset{\circ}{A} = \bigcup\{V \subset X : V \subset A \text{ ve } V \in \tau\}$ dır. Bu eşitliğin her iki tarafının tümleyenini alalım.

$$\overset{\circ}{A}{}^c = \bigcap\{V^c \subset X \,;\, A^c \subset V^c \text{ ve } V^c \text{ kapalı}\}$$

dır. A^cnı kapsayan bütün V^c kapalıların ara kesiti tanım 2.29 dan $\overline{A^c}$ eşittir. O halde

$$\overset{\circ}{A}{}^c = \bigcap\{V^c \subset X \,;\, A^c \subset V^c \text{ ve } V^c \text{ kapalı}\} = \overline{A^c}$$

bulunur.

ii) Tanım 2.29 dan $\bar{A} = \bigcap\{K \subset X : A \subset K \text{ ve } K \in \kappa_A\}$ dır. Bu eşitliğin her iki tümleyenini alalım,

$$\overline{A}{}^c = \bigcup\{K^c \subset X \,;\, K^c \subset A^c \text{ ve } K^c \text{ açık}\}$$

dır. A^cnın kapsadığı bütün K^c açıklarının birleşimi Tanım 2.43 ten $\overset{\circ}{A^c}$ eşittir. O halde

$$\overline{A}{}^c = \bigcup\{K^c \subset X \,;\, K^c \subset A^c \text{ ve } K^c \text{ açık}\} = \overset{\circ}{A^c}$$

bulunur.

Teorem 2.46 (X,τ) bir topolojik uzay olsun. Her $A\subset X$ için

a) $\bar{A}=\left(\overset{\circ}{A^{c}}\right)^{c}$ b) $\overset{\circ}{A}=\left(\overline{A^{c}}\right)^{c}$ dir.

İspat:

a) $\bar{A}=\bigcap\{K\subset X \;:\; A\subset K,\; K^{c}\in\tau\}=\left(\bigcup\{K^{c}\subset X \;:\; K^{c}\subset A^{c},\; K^{c}\in\tau\}\right)^{c}=\left(\overset{\circ}{A^{c}}\right)^{c}$ bulunur.

b) Sonuç 2.40 (K_2) den $A^{c}\subset\overline{A^{c}}$ dır. Bunun tekrar tümleyenini alalım.

$$\left(\overline{A^{c}}\right)^{c}\subset\left(A^{c}\right)^{c}=A\Rightarrow\left(\overline{A^{c}}\right)^{c}\subset A.$$

$\overline{A^{c}}$ kapalı olduğundan $\left(\overline{A^{c}}\right)^{c}$ açıktır. $\overset{\circ}{A}$, A nın kapsadığı en geniş açık olduğunda

$$\left(\overline{A^{c}}\right)^{c}\subset\overset{\circ}{A} \qquad (1)$$

olur. $U\subset A$ herhangi bir açık olsun. Bu durumda

$$U\subset A\Rightarrow A^{c}\subset U^{c}=\overline{U^{c}}\Rightarrow A^{c}\subset\overline{U^{c}}\Rightarrow\overline{A^{c}}\subset\overline{U^{c}}=U^{c}$$

veya $U\subset\left(\overline{A^{c}}\right)^{C}$ olur. Herhangi bir $U\subset A$ için $U\subset\left(\overline{A^{c}}\right)^{C}$ yazıldığından özel olarak $U=\overset{\circ}{A}$ alınırsa,

$$\overset{\circ}{A}\subset\left(\overline{A^{c}}\right)^{C} \qquad (2)$$

olur. O halde (1) ve (2) den $\overset{\circ}{A}=\left(\overline{A^{c}}\right)^{C}$ bulunur.

Tanım 2.47 (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\overset{\circ}{A}$, A nın içi olsun. Her bir $x \in \overset{\circ}{A}$ noktasına A nın bir **iç noktası** denir.

Teorem 2.48 (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. x noktasının A kümesinin bir iç noktası olması için gerek ve yeter şart x'in en az bir N komşuluğunu A kümesinin kapsamasıdır; yani

$$x \in \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \exists N \in \mathcal{N}(x) \text{ var } \ni N \subset A$$

dır.

İspat: $x \in \overset{\circ}{A}$ olsun . Teorem 2.44 (i) den $\overset{\circ}{A}$ açık olduğundan $\overset{\circ}{A} \in \mathcal{N}(x)$ ve teorem 2.44 (ii) den $\overset{\circ}{A} \subset A$ dır.

$\exists N \in \mathcal{N}(x)$ için $x \in N \subset A$ olsun. $N \in \mathcal{N}(x)$ olduğun da tanım 2.10 dan $\exists U \in \tau$ var öyle ki $x \in U \subset N \subset A$ dır. $\overset{\circ}{A}$, A nın kapsadığı en geniş açık olduğundan

$$x \in U \subset \overset{\circ}{A} \subset A$$

dır. O halde $x \in \overset{\circ}{A}$ bulunur.

Bu teoreme göre $x \notin \overset{\circ}{A} \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}(x)$ için $N \not\subset A$ veya $N \cap A^c \neq \emptyset$ dır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Teşekkürler

İç İşlem

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 6