ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Kapanış İşlemi

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 5

Teorem 2.24 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A kapalıdır ancak ve ancak A bütün yığılma noktalarını içerirse, yani,

$$A \text{ kapalı} \Leftrightarrow A' \subset A \text{ ise.}$$

İspat: A kapalı ve x, A nın bir yığılma noktası ve $x \notin A$ olsun. Bu durumda $x \in A^c$ ve $A^c \in \tau$ dur. A^c açık ve x i içerdiğinden A^c x in bir komşuluğu ve $A^c \cap A = \emptyset$ dır. O halde x, A nın bir yığılma noktası değildir. Bu bir çelişkidir. Böylece $x \in A$ dır , yani $A' \subset A$ dır.

Tersine olarak, kabul edelim ki A bütün yığılma noktalarını içersin. $y \in A^c$ keyfi bir nokta olsun. Bu durumda y, A nın bir yığılma noktası değildir. O halde $\exists\, U_y \subset X$ açık komşuluğu var $\ni U_y \cap A = \emptyset$. Böylece $y \in A^c$ keyfi bir nokta ve $U_y \subset A^c$ olması teorem 2.17 den A^c açık, A kapalıdır.

Teorem 2.25 (X,τ) bir topolojik uzay, $A,B \subset X$ ve $A \subset B$ olsun. Bu durumda $A' \subset B'$ dır.

İspat: $A \subset B$ ve $x \in A'$ herhangi bir nokta olsun. Tanım 2.21 den $x \in A' \Rightarrow$ $\forall\, N \in N(x)$ için $(N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset$ dur ve $A \subset B$ olduğundan da

$$\forall\, N \in N(x) \text{ için } (N \setminus \{x\}) \cap B \neq \emptyset \Rightarrow x \in B'$$

olur. $x \in A'$ keyfi olduğundan $A' \subset B'$ olur.

Teorem 2.26 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A_1,A_2 \subset X$ olsun. Bu durumda $(A_1 \cup A_2)' = A_1' \cup A_2'$ dır.

İspat: $A_1 \subset A_1 \cup A_2$, $A_2 \subset A_1 \cup A_2$ dır. Teorem 2.25 den $A_1' \subset (A_1 \cup A_2)'$ ve $A_2' \subset (A_1 \cup A_2)'$ olur. Buradan

$$(A_1' \cup A_2') \subset (A_1 \cup A_2)' \qquad (1)$$

Şimdi $(A_1 \cup A_2)' \subset A_1' \cup A_2'$ olduğunu göstermek için $x \notin (A_1' \cup A_2')$ alalım. Bu durumda $x \in (A_1' \cup A_2')^c \Rightarrow x \in (A_1')^c \cap (A_2')^c$ dır. Böylece $\exists N_i \in N(x)$, $i = 1,2$ komşuluğu var $\ni (N_i \setminus \{x\}) \cap A_i = \emptyset$, $i=1,2$. Buradan $N = N_1 \cap N_2 \in N(x)$ ve $(N \setminus \{x\}) \cap (A_1 \cup A_2) = \emptyset$ olur. O halde $x \notin (A_1 \cup A_2)'$ dır. Böylece

$$(A_1 \cup A_2)' \subset (A_1' \cup A_2') \qquad (2)$$

(1) ve (2) den $A_1' \cup A_2' = (A_1 \cup A_2)'$ elde edilir.

Teorem 2.27 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A_1, A_2 \subset X$ olsun. Bu durumda

$$(A_1 \cap A_2)' \subset A_1' \cap A_2'.$$

İspat: $A_1 \cap A_2 \subset A_1$ ve $A_2 \cap A_1 \subset A_2$ olduğu açıktır. Teorem 2.25 den $(A_1 \cap A_2)' \subset A_1'$ ve $(A_2 \cap A_1)' \subset A_2'$ $\Rightarrow (A_1 \cap A_2)' \subset A_1' \cap A_2'$ olur.

$A_1' \cap A_2' \subset (A_1 \cap A_2)'$ ifadesinin genel de doğru olmadığını aksi bir örnekle gösterelim.

Örnek 2.28. (R, τ_d) alışılmış topolojik uzay ve $Q, I \subset R$ olsun. Bu durumda $\forall x \in R$ alalım. $\forall N \in N(x)$ için $(N \setminus \{x\}) \cap Q \neq \emptyset$ ve $(N \setminus \{x\}) \cap I \neq \emptyset$ dır. O halde $Q' = R$ ve $I' = R$ dır. Diğer taraftan $Q \cap I = \emptyset$ dır. Böylece $Q' \cap I' = R \subset \emptyset = (Q \cap I)'$ olur. Bu da olmaz. O halde $A_1' \cap A_2' \not\subset (A_1 \cap A_2)'$ dır.

Kapanış İşlemi

Tanım 2.29 (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve κ ise, τ topolojisine göre kapalılar ailesi olsun. A kümesini kapsayan κ ya ait bütün kapalı kümelerin $\kappa_A=\{K\subset X : A\subset K \text{ ve } K\in\kappa\}$ arakesitine A kümesinin **kapanışı** denir ve $\bar{A}$ ile gösterilir, yani,

$$\bar{A} = \cap\{K \subset X : A \subset K,\ K \in \kappa\} = \bigcap_{K\in\kappa_A} K$$

dır.

Teorem 2.30 (X,τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $\bar{A}$, A nın kapanışı olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler vardır:

i) $\bar{A}$ kümesi kapalıdır,

ii) $A \subset \bar{A}$ dır,

iii) $\bar{A}$ kümesi A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir , yani A yı kapsayan her $K\in\kappa$ kapalı kümesi için $A \subset \bar{A} \subset K$ dır.

iv) A kümesinin kapalı olması için gerek ve yeter şart $\bar{A}=A$ olmasıdır,

v) $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$, vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$

İspat:

i) $\bar{A}$ kümesi kapalı kümelerin arakesiti olduğundan teorem 2.9 (k_3) özelliğinden $\bar{A}$ kapalıdır.

ii) $A \subset \bar{A}$ olması tanım 2.29 dan açıktır.

iii) $\bar{A}$ kümesi (i) den kapalı ve (ii) den A yı kapsar. O halde $\bar{A} \in \kappa_A$ dır. Kabul edelim ki A yı kapsayan $\bar{A}$ dan daha küçük kapalı K' olsun. Yani $A \subset K' \subset \bar{A}$ dır. Diğer taraftan $\bar{A}$, A yı kapsayan bütün kapalıların arakesitine eşit olduğundan $\bar{A} \subset K'$ dır. O halde $\bar{A} = K'$ dır , yani $\bar{A}$, A yı kapsayan en küçük kapalı kümedir.

iv) A kapalı olsun. $A \subset A$ olduğundan $A \in \kappa_A$ dır. Tanım 2.29 dan $\bar{A} \subset A$ dır. (ii) den $A \subset \bar{A}$ dır. O halde $A = \bar{A}$ dır.

Tersine olarak $\bar{A}=A$ olsun. (i) den $\bar{A}$ kapalı olduğundan A kapalıdır.

v) $A,B \subset X$ ve $A \subset B$ olsun. (ii) de $B \subset \bar{B}$ dır. O halde $A \subset \bar{B}$ dir. $\bar{B}$ (i) dan kapalıdır. (iii) den A yı kapsayan en küçük küme $\bar{A}$ olduğundan $A \subset \bar{A} \subset \bar{B} \Rightarrow \bar{A} \subset \bar{B}$ dır.

vi) $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$?

$B=\bar{A}$ alalım. $\bar{A}$ kapalı olduğundan B kapalı (iv)den $B=\bar{B}=\bar{\bar{A}} \Rightarrow \bar{A}=\bar{\bar{A}}$ olur.

Teorem 2.31 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda A nın kapanışı, A nın X topolojik uzayındaki değme noktalarının kümesine eşittir, yani

$$\bar{A} = \{x \in X : x, \text{ A nın değme noktası}\}$$

dır.

İspat: $x \notin \bar{A}$ ise, gösterelim ki x, A nın değme noktası değildir. $x \notin \bar{A} \Rightarrow x \in \bar{A}^c$ dır. Ayrıca $\bar{A} \cap \bar{A}^c = \emptyset$ ve $A \subset \bar{A}$ olmasından $A \cap \bar{A}^c = \emptyset$ dır. $\bar{A}$ kapalı, açık $\bar{A}^c$ ve $x \in \bar{A}^c$ olmasından $\bar{A}^c \in N(x)$ dır. $A \cap \bar{A}^c = \emptyset$ olmasından x, A nın bir değme noktası değildir. O halde

$$\bar{A} \supset \{x \in X : x \text{ A nın değme noktası }\}. \quad (1)$$

Tersine olarak x, A nın bir değme noktası değil ise, gösterelim ki $x \notin \bar{A}$ dır. x, A nın bir değme noktası değilse $\exists\, U \in N(x)$ açık komşuluğu var $\ni U \cap A = \emptyset$ dır. $A \cap U = \emptyset \Rightarrow A \subset U^c$ $x \in U$ olduğundan $x \notin U^c$ dır. U^c ,A yı kapsayan kapalı bir küme olduğundan $U^c \in \kappa_A$ dır. O halde $x \notin \bar{A}$ dır. Böylece

$$\{x \in X : x, \text{ A nın değme noktası }\} \supset \bar{A} \quad (2)$$

dır. (1)ve (2) den

$$\bar{A} = \{x \in X : x, \text{ A nın değme noktası}\}$$

bulunur.

Teorem 2.32 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda

$$\bar{A}=A \cup A'.$$

İspat: İlk olarak $A \cup A' \subset \bar{A}$ olduğunu gösterelim. Teorem 2.31 den A nın değme noktalarının kümesi $\bar{A}$ eşittir. Diğer taraftan A nın her yığılma noktası aynı zamanda değme noktası olduğundan $A' \subset \bar{A}$ dır. O halde

$$A' \subset \bar{A} \text{ ve } A \subset \bar{A} \Rightarrow A \cup A' \subset \bar{A} \qquad (1)$$

dır.

Şimdi $\bar{A} \subset A \cup A'$ olduğunu gösterelim. $\forall x \in \bar{A}$ için x, A nın değme noktası (teorem2.31) olduğundan $\forall\ N \in N(x)$ için $N \cap A \neq \emptyset$ dır. Burada iki durum vardır:

a) Eğer

$$x \in N \cap A \Rightarrow x \in A \Rightarrow x \in A \cup A' \Rightarrow \bar{A} \subset A \cup A' \ (2)$$

dır.

b) Eğer $x \notin N \cap A \Rightarrow x \in N$ ve $x \notin A$ dır. Bu durumda

$$(N \setminus \{x\}) \cap A = (N \cap A) \setminus \{x\}) \cap A = N \cap A \setminus \emptyset \neq \emptyset$$

dır. O halde $x \in A'$ dır. Böylece

$$\bar{A} \subset A \cup A' \qquad (2')$$

dir. (1) ve (2-2') den

$$\bar{A}=A \cup A'$$

bulunur.

Sonuç 2.33 (X,τ) topolojik uzayının her $A\subset X$ altkümesi için

$$x\in \bar{A} \Leftrightarrow \forall\ N\in N(x) \text{ için } N\cap A \neq \emptyset.$$

Şimdi teorem 2.30 u kullanarak teorem 2.24 ü yeniden ifade ve ispat edelim.

Teorem 2.34 (X,τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A nın kapalı olması için gerek ve yeter şart A nın bütün yığılma noktalarının kümesini kapsamasıdır , yani

$$A \text{ kapalı} \Leftrightarrow A' \subset A.$$

İspat: A kapalı olsun. Bu durumda teorem 2.30 (iv) den $A=\bar{A}$ dır. Teorem 2.32 den $A=\bar{A}=A\cup A'$ dır. O halde $A' \subset A$ bulunur.

Tersine olarak $A'\subset A$ olsun. A kapalı mı? $A'\subset A \Rightarrow A\cup A' \subset A\cup A = A \Rightarrow \bar{A}\subset A$ olur. Teorem 2.30 (ii) den $A \subset \bar{A}$ olduğu biliniyor. O halde $A=\bar{A}$ bulunur. Yine teorem 2.30 (iv) den A kapalıdır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş

Kapanış İşlemi

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 5