



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Topolojiye Giriş
Komşuluk Tabanı

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 4

Teorem 2.11 (X, τ) bir topolojik uzay ve $N(x)$, $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi olsun. Bu durumda $N(x)$ komşuluk aksiyomları denilen aşağıdaki özellikleri sağlar:

$N_1)$ $N(x)$ ailesine ait her küme x noktasını içerir, yani $\forall N \in N(x)$ için $x \in N$.

$N_2)$ $N(x)$ ailesine ait herhangi bir kümenin her üst kümesi de $N(x)$ aittir, yani $N \in N(x)$ ve $N \subset M$ ise, $M \in N(x)$ dır.

$N_3)$ $N(x)$ ailesine ait sonlu sayıdaki her elemanın ara kesiti de yine $N(x)$ aittir, yani $N_1, N_2, \dots, N_n \in N(x)$ için, $\bigcap_{i=1}^n N_i \in N(x)$ dır.

$N_4)$ Her $N \in N(x)$ için $U \subset N$ olacak şekilde öyle bir $U \in N(x)$ vardır ki her $y \in U$ için $N \in N(y)$ dır, yani N , x noktasına yeteri kadar yakın noktaların da komşuluğudur.

İspat:

$N_1)$ $\forall N \in N(x) \Rightarrow \exists U_x \in \tau \text{ var } \ni x \in U_x \subset N$ (Tanım:2.10) $\Rightarrow x \in N$. Ayrıca $N \neq \emptyset$ dır.

$N_2)$ $N \in N(x)$ herhangi bir küme ve $N \subset M$ olsun. $N \in N(x) \Leftrightarrow \exists U_x \in \tau \ni x \in U_x \subset N$ dır. $N \subset M$ olduğundan $x \in U_x \subset M$ dır. O halde $M \in N(x)$ dır.

$N_3)$ $N_1, N_2, \dots, N_n \in N(x)$ olsun. Bu durumda

$$N_1 \in N(x) \Rightarrow \exists U_1 \in \tau \ni x \in U_1 \subset N_1$$

$$N_2 \in N(x) \Rightarrow \exists U_2 \in \tau \ni x \in U_2 \subset N_2$$

.....

$$N_n \in N(x) \Rightarrow \exists U_n \in \tau \ni x \in U_n \subset N_n$$

yazılır. $i=1,2,\dots,n$ için $x \in U_i \subset N_i$ olduğundan $x \in U = \bigcap_{i=1}^n U_i \subset \bigcap_{i=1}^n N_i = N$ olur.

Topolojinin (t_2) özelliğinden $U = \bigcap_{i=1}^n U_i \in \tau$ olduğundan $N = \bigcap_{i=1}^n N_i \in N(x)$ dır.

$N_4)$ $\forall N \in N(x)$ komşuluğu için $x \in U \subset N$ olacak şekilde U açık kümesi vardır. Tanım 2.10 dan U, x noktasının açık bir komşuluğudur. O halde $U \in N(x)$ dır. Yine tanım 2.10 da N, U içindeki her noktanın komşuluğu olduğu ifade edilmişti. O halde $\forall y \in U$ için $N \in N(y)$ dır.

Örnek 2.12 $\tau = \{\emptyset, X\}$ ailesi X üzerinde kaba topoloji olsun. Her $x \in X$ noktasının komşuluklar ailesi $N(x) = \{X\}$ dır

Örnek 2.13 $X=\{a,b,c,d,e\}$ kümesi üzerindeki topoloji

$$\tau=\{\emptyset,X,\{a\},\{a,b\},\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,b,e\}\}$$

olsun. Bu topolojiye göre

- i) e noktasının komşuluklar ailesini,
- ii) c noktasının komşuluklar ailesini bulalım.

Çözüm:

(i) e noktasını içinde bulunduran açık komşuluklar X ve $\{a,b,e\}$ dir. Ayrıca e noktasını içeren $\{a,b,e\}$ açık kümesinin üst kümeleri ise, $\{a,b,c,e\}, \{a,b,d,e\}$ ve X dir. Diğer taraftan e yi içeren X açık kümesinin üst kümesi kendisidir. O halde e nin komşuluklar ailesi

$$N(e)=\{\{a,b,e\},\{a,b,c,e\},\{a,b,d,e\},X\}.$$

(ii) c noktasını içinde bulunduran açık komşuluklar X , $\{a,c,d\}$ ve $\{a,b,c,d\}$ dir. Ayrıca c noktasını içeren $\{a,c,d\}$ açık kümesinin üst kümesi X ve $\{a,b,c,d\}$ nin dışında sadece $\{a,c,d,e\}$ dir. O halde c nin komşuluklar ailesi

$$N(c)=\{\{a,c,d\},\{a,b,c,d\},\{a,c,d,e\},X\}.$$

Örnek 2.15 $(X, P(X))$ ayrık topolojik uzay ve $x \in X$ olsun.

$$E(x) = \{x\}$$

ailesi x noktasının komşuluklar tabanıdır. Gerçekten, $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ için $E \subset N$ olacak şekilde E in oluşturduğu kümeler ailesi $E(x)$ olduğuna göre

$N = \{x\}$ alınması halinde $E \subset \{x\}$ olacak şekilde bir tek $E = \{x\}$ kümesi vardır. O halde $E(x) = \{x\}$ dir.

Örnek 2.16 (X,d) bir metrik uzay ve $x \in X$ olsun. $E(x) = \{B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N}\}$ ailesi x in bir komşuluklar tabanıdır. Gerçekten her $N \in \mathcal{N}(x)$ için N komşuluk olduğundan $\exists U \subset X$ açığı var $\ni x \in U \subset N$ dır. U , (X,d) metrik uzayında açık olmasından $\exists r > 0$ sayısı var $\ni B(x,r) \subset U$ dır. $\frac{1}{n} < r$ olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ seçilebileceğinden $B(x, \frac{1}{n}) \subset B(x,r) \subset U \subset N$ olur. O halde $E(x) = \{ B(x, \frac{1}{n}) : n \in \mathbb{N} \}$ x in komşuluklar tabanıdır.

Benzer şekilde $\{ B[x, \frac{1}{n}] : n \in \mathbb{N} \}$ de x noktasının bir komşuluklar tabanıdır. O halde x noktasının komşuluklar tabanı birden çok olabilir.

Not: (X,τ) topolojik uzay ve $x \in X$ olsun. x noktasını içeren bütün açıklar ailesi, x noktasının bir komşuluklar tabanıdır, yani

$$U(x) = \{U \subset X : U \in \tau \text{ ve } x \in U\}$$

ailesi x in komşuluklar tabanıdır. Üstelik $U(x) \subset E(x)$ dır.

Teorem 2.17 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesi açıktır $\Leftrightarrow \forall x \in A$ için $\exists N_x \in \mathcal{N}(x)$ var $\ni x \in N_x \subset A$ dır.

İspat: A açık olsun. $\forall x \in A$ için $A = N_x \in \mathcal{N}(x)$ alabiliriz. O halde $x \in A \subset A$ dır. Şimdi $\forall x \in A$ için $\exists N_x \in \mathcal{N}(x) \ni N_x \subset A$ olsun. N_x komşuluk olduğundan $\exists U_x \in \tau$ var $\ni U_x \subset N_x$ dır. $\forall x \in A$ için $x \in U_x \subset N_x \subset A$ olduğundan $\cup \{U_x : x \in A, U_x \subset N_x \subset A\} = A$ dır. (t_3) özelliğinden A açıktır.

Tanım 2.18 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın en az bir elemanı varsa, x noktasına A nın bir **değme noktası** denir, yani

$$(x \in X, A \text{ nın değme noktası.}) \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}(x) \text{ için } N \cap A \neq \emptyset.$$

Bu tanıma göre A nın bütün elemanları A nın değme noktasıdır.

Örnek 2.19 d metriği $\mathbb{R}$ nın alışılmış metriği ve $A=[0,1)\subset\mathbb{R}$ olsun. $\forall x\in A$ ve $\forall r>0$ için $B(x,r)\cap A\neq\emptyset$ dır. O halde A nın her noktası değme noktasıdır. $1\notin A$ olmasına rağmen $\forall r>0$ için $B(1,r)=\{x: d(x,1)< r\}=(1-r, 1+r)$ açık komşuluğu ile A nın kesişimi boştan farklıdır, yani

$$B(1,r)\cap A \neq \emptyset$$

dır. O halde 1 de A nın bir değme noktasıdır.

Teorem 2.20 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

- i) x noktası A nın değme noktasıdır,
- ii) $\forall E \in \mathcal{E}(x)$ için $E \cap A \neq \emptyset$,
- iii) $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ için $U \cap A \neq \emptyset$.

İspat:

- i) $\Rightarrow$ ii) $\forall E \in \mathcal{E}(x)$ için $E \in \mathcal{N}(x)$ ve (i) den $E \cap A \neq \emptyset$
- ii) $\Rightarrow$ iii) $\forall U \in \mathcal{U}(x)$ için $U \in \mathcal{E}(x)$ ve (ii) den $U \cap A \neq \emptyset$.
- iii) $\Rightarrow$ i) $\forall N \in \mathcal{N}(x)$ x in bir komşuluğu olması ve tanım 2.10 dan $\exists U \in \tau$ var $\exists x \in U \subset N$ dir. O halde $U \cap A \subset A \cap N$ ve $U \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $A \cap N \neq \emptyset$ dir. Böylece x , A nın bir değme noktasıdır.

Tanım 2.21 (X, τ) bir topolojik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. x noktasının her komşuluğunda A nın x den farklı noktaları varsa, x noktasına A nın **bir yığılma (limit) noktası** denir. A nın bütün yığılma noktalarının kümesine A dan **türetilen küme** denir ve A' ile gösterilir. Böylece

$$x \in A' \Leftrightarrow \forall N \in \mathcal{N}(x) \text{ için } (N \setminus \{x\}) \cap A \neq \emptyset.$$

A nın her yığılma noktası A nın bir değme noktasıdır. Fakat her değme noktası bir yığılma noktası değildir (Örnek 2.23).

Tanım 2.22. (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesine ait herhangi bir x noktası A nın yığılma noktası değilse; yani $x \in A$ ve $x \notin A'$ ise ; x e A kümesinin **ayrık (izole) noktası** denir.

Örnek 2.23 $\mathbb{R}$ alışılmış d metriği ile donatılmış, $A = \{\frac{1}{n} : n \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ ve $B = [0,1) \cup \{6\} \subset \mathbb{R}$ olsun. Bu durumda A nın yığılma noktalarını, B nin de ayrılmış noktasını bulalım. Örnek 1.6 dan bilindiği gibi $\mathbb{R}$ de bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının alışılmış d metriğine göre r -komşuluğu

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : d(x, x_0) = |x - x_0| < r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

açık aralığı olarak tanımlanmıştı. O halde $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{n} \in \mathbb{R}$ noktasının her $N \in \mathbb{N}(\frac{1}{n})$ komşuluğu $N = (\frac{1}{n} - r, \frac{1}{n} + r)$ açık aralığı olarak alınabilir. Böylece

$$(N \setminus \{\frac{1}{n}\}) \cap A = \emptyset$$

olur. Bu demektir ki A nın hiçbir elemanı yığılma noktası değildir. Gerçekten, $\forall N \in \mathbb{N}(0)$ (ya da $\forall r > 0$) için $(N \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$ (ya da $(-r, r) \setminus \{0\}) \cap A \neq \emptyset$ olduğundan $A' = \{0\}$ dir. Diğer taraftan $6 \in B$ noktası B nin yığılma noktası olmayıp, bir ayrılmış noktasıdır. Gerçekten; $0 < r < 1$ olmak üzere $N = ((6-r, 6+r) \setminus \{6\}) \cap B = \emptyset$ ve $N \cap B = \{6\}$.



UZOM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Topolojiye Giriş
Komşuluk Tabanı

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 4