



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Matematik
Topolojik Uzay
Kavramı

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 3

II. BÖLÜM

TOPOLOJİK UZAYLAR

Topoloji Ve Topolojik Uzay Kavramı

Bu bölüme "Topoloji nedir"? diye bir soru ile başlamanın uygun olacağına inanmaktayım. Çünkü önce ne ile uğraşılacağı hakkında genel bilgiye sahip olunursa, diğer özellikler bu genel bilgi doğrultusunda daha bir anlam kazanır. Bu nedenle topolojinin genel kavramları hakkında yeri geldikçe kısa tarihi bilgiler verilecektir. Bu bilgilerle öğrencinin ilgisini çekmek ve araştırma yapmasına zemin hazırlamak amaçlanmıştır.

Bu bölümde görüleceği gibi önce konularla ilgili temel kavramlar verilmekte, daha sonra bu kavramlar arasındaki ilişkilerin neler olduğu problem ve teoremlerle sunulmaktadır. Bunların çözümünde veya ispatında öğrenci kendisine neler verildiği, kendisinden nelerin istendiğini tespit ederek işe başlarsa, başarı kaçınılmazdır.

Uzaya ait bütün özellikler ile homeomorfizm altında değişmeyen özellikleri araştıran bir matematik bilim dalına **topoloji** denir. (Klein,1872)

Diğer tanımları da incelendiğinde, topolojide birinci problem genel uzay tanımını vermek, ikincisi ise, değişik yollarla tanımlanan topolojik yapılar arasındaki bağıntıları araştırmaktır. Yine görülecektir ki öğrenciye soyut gelen topolojik kavramların somut örneklerini birinci bölümdeki metrik uzaylarda bulmak mümkündür.

Tanım 2.1. X boştan farklı bir küme ve τ , X in kuvvet kümesi olan $P(X)$ in bir altkümesi olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan τ ailesine X üzerinde bir **topoloji** (veya **topolojik yapı**) denir:

$$t_1) \emptyset, X \in \tau,$$

$$t_2) \tau \text{ 'ya ait sonlu sayıdaki elemanların arakesiti yine } \tau \text{ ya aittir; yani } A_1, A_2, \dots, A_n \in \tau \text{ için } \bigcap_{i=1}^n A_i \in \tau,$$

$$t_3) \tau \text{ ya ait keyfi sayıdaki elemanların birleşimi yine } \tau \text{ ya aittir; yani } \forall \{A_i\}_{i \in I} \subset \tau \text{ için } \bigcup_{i \in I} A_i \in \tau \text{ dır.}$$

τ nun elemanlarına X in **açık alt kümeleri**, (X, τ) çiftine **topolojik uzay** denir. X kümesinin elemanlarına da (X, τ) veya kısaca X topolojik uzayının **noktaları** denir.

Not: 1. Bourbaki (t_2) ve (t_3) özelliklerini sağlayan X in alt kümeler ailesi verildiğinde, kümelerle ilgili

$$\bigcup_{i \in I} A_i = \{a \in X : \exists i \in I \text{ için } a \in A_i\}, \bigcap_{i \in I} A_i = \{a \in X : \forall i \in I \text{ için } a \in A_i\}$$

özelliklerde $I = \emptyset$ almakla

$$\bigcup_{i \in \emptyset} A_i = \emptyset \text{ ve } \bigcap_{i \in \emptyset} A_i = X$$

olduğunu göstermiştir. Dolayısıyla bazı kaynaklarda topoloji aksiyomları olarak sadece (t_2) ve (t_3) verilmektedir.

Not 2: (X, d) metrik uzayında tanımlanan açıklar ailesinin Teorem 1.10 daki özellikleri sağlamakla aslında topoloji özellikleri olan $(t_1), (t_2)$ ve (t_3) ü sağladığına dikkat edilmelidir. Dolayısıyla X üzerindeki d metriği tarafından oluşturulan τ_d topolojisine **metrik topoloji** denir. Örneğin $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi üzerinde $\mathbb{R}$ nın alışılmış d metriğinin

$$\tau_d = \{ A \subset \mathbb{R} : A = \bigcup_{x \in A} (a_x, b_x), x \in (a_x, b_x) \text{ ve } a_x, b_x \in \mathbb{R} \}$$

bu alışılmış topolojisini oluşturduğu teorem 2.63 de gösterilecektir. Böylece $(\mathbb{R}, \tau_d)$ alışılmış topolojik uzay olarak yeri geldikçe kullanılacaktır.

Not 3: Açık kümelerin keyfi kesişiminin açık olması gerekmez. (Sonuçlar 1.11(b))

Metrik uzaylarda olduğu gibi, bir X kümesi tek elamanlı değilse, üzerinde birden fazla topoloji tanımlanabilir.

Tanım 2.2 τ_1 ve τ_2 , X kümesi üzerinde iki topoloji olsun. Eğer τ_1 in her elemanı τ_2 'nin elemanı ise, yani $\tau_1 \subset \tau_2$ ise, τ_1 topolojisi τ_2 den **daha kaba** veya τ_2 topolojisi τ_1 den **daha ince yapıya** sahiptir denir.

Eğer $\tau_1 \subset \tau_2$ ve $\tau_1 \neq \tau_2$ ise, τ_1 topolojisi τ_2 den **kesinlikle daha kaba yapıya** sahiptir denir.

Sonuç 2.3 X kümesi üzerindeki bütün topolojiler ailesi $\{\tau_i\}_{i \in I}$ olsun. Kolayca gösterilebilir ki $\{\tau_i\}_{i \in I}$ topolojiler ailesi üzerinde tanımlanan " $\subset$ " (daha kaba veya daha ince) olma bağıntısı, bir kısmı sıralama bağıntısıdır. " $\subset$ " bağıntısı tam sıralama bağıntısı değildir.

Örnek 2.4 $X = \{a, b\}$ ve $\tau_1 = \{\emptyset, X, \{a\}\}$, $\tau_2 = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olsun. τ_1 ve τ_2 aileleri X üzerinde iki topolojidir. Fakat $\tau_1 \not\subset \tau_2$ ve $\tau_2 \not\subset \tau_1$ olduklarından τ_1 , τ_2 ile " $\subset$ " bağıntısına göre karşılaştırılmaz.

Örnek 2.5 Eleman sayısı birden fazla olan bir X kümesinin kuvvet kümesi $P(X)$ olsun. $P(X)$ ailesi (t_1) , (t_2) ve (t_3) özelliklerini sağladığı açıktır. Gerçekten, (t_1) $P(X)$ in tanımından açık, (t_2) ise $P(X)$ 'e ait her sonlu sayıdaki alt kümelerin ara kesiti ya boştur veya X in bir alt kümesi olmasından açıktır. Benzer şekilde (t_3) ün sağladığı da açıktır. O halde $P(X)$, X kümesi üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye **ayrık** (diskret) **topoloji**, $(X, P(X))$ uzayına da **ayrık** (diskret) **topolojik uzay** denir. Ayrıca $P(X)$ topolojisi X üzerindeki topolojik yapıların en ince yapılısidir.

$(X, P(X))$ ayrık uzayında X in her altkümesi açıktır. Ayrıca X üzerinde tanımlanan ayrık metrikle oluşturulan topoloji ile, $P(X)$ topolojisi aynıdır, yani $P(X) = \tau_d$ dır.

(X, τ) topolojik uzayının τ topolojisi, X üzerindeki herhangi bir d metriği ile oluşturulan τ_d topoloji ile aynı ise, (X, τ) topolojik uzayına **metrikleşebilir uzay** denir. Not 2 den her metrik uzay, bir topolojik uzaydır. Ancak bunun tersi genelde doğru değildir.

Örnek 2.6 X herhangi bir küme ve $\tau = \{\emptyset, X\}$ olsun. τ ailesi X üzerinde bir topolojidir. Bu topolojiye X üzerindeki **kaba** (indiskret= ayırık olmayan) **topoloji** denir. X üzerinde τ topolojisine eşit olacak şekilde bir τ_d topolojisi yoktur. Ayrıca τ topolojisi X üzerindeki topolojilerin en kaba yapılı topolojisidir.

Örnek 2.7 $X = \{a, b\}$ ve $\tau = \{\emptyset, X, \{b\}\}$ olsun. Kolayca gösterilir ki τ , X üzerinde bir topolojidir. Bu (X, τ) uzayı üzerinde bir d metriğinin tanımlandığını varsayalım, $r = d(a, b)$ diyelim. Bu durumda $B_d(a, r) = \{a\}$ dır. O halde $\{a\} \subset X$ altkümesi d -açık olmasına rağmen $\{a\} \notin \tau$ dır. O halde τ topolojisi bir metrik tarafından oluşturulmuş değildir.

Tanım 2.8 (X, τ) bir topolojik uzay olsun. X e göre tümleyeni açık olan kümeye, τ topolojisine göre **kapalı küme** denir, yani

$$K \subset X \text{ kapalı} \Leftrightarrow K^c = X \setminus K \in \tau \text{ açık.}$$

τ topolojisine göre X in bütün kapılar ailesini

$$\kappa = \{ K \subset X : K \text{ kapalı} \Leftrightarrow K^c \in \tau \}$$

ile gösterelim.

Not: X in kapalı veya açık olmayan alt kümeleri de vardır. Ancak bütün topolojilerde $\emptyset$ ve X hem açık hem de kapalı kümelerdir.

Teorem 2.9. (X, τ) bir topolojik uzayının κ kapalılar ailesi aşağıdaki özellikleri sağlar:

$k_1)$ $X, \emptyset \in \kappa$,

$k_2)$ κ nın her sonlu sayıdaki elemanlarının birleşimi yine κ ya aittir , yani $K_1, K_2, \dots, K_n \in \kappa$ için $\bigcup_{i=1}^n K_i \in \kappa$,

$k_3)$ κ nın keyfi sayıdaki elemanlarının arakesiti yine κ ya aittir, yani $\{K_i\}_{i \in I} \subset \kappa$ için $\bigcap_{i \in I} K_i \in \kappa$.

Tanım 2.10 (X, τ) bir topolojik uzay ve $A \subset X$ olsun. A kümesini kapsayan bir U açık kümesinin her N üst kümesine, A kümesinin **komşuluğu** denir, yani

$$(N, A \subset X \text{ nın bir komşuluğu}) \Leftrightarrow (\exists U \subset X \text{ açığı var } \ni A \subset U \subset N).$$

Eğer $A = \{x\}$ ise, bu durumda

$$(N, x \in X \text{ noktasının bir komşuluğu}) \Leftrightarrow (\exists U \subset X \text{ açığı var } \ni x \in U \subset N).$$

x noktasını içeren U açık altkümeye de x in **açık komşuluğu** denir. Ayrıca N sadece x in komşuluğu değil, U içindeki her noktanın da komşuluğudur. Görüldüğü gibi N komşulukları metrik uzaylardaki r - komşuluklarının bir genelleştirilmesidir (Tanım 1.5).

Her hangi bir $x \in X$ noktasının bütün komşuluklar ailesini $N(x)$ ile gösterelim , yani

$$N(x) = \{N \in P(X) : N, x \text{ in komşuluğu} \}.$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Matematik

Topolojik Uzay
Kavramı

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 3