ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Matematik

Metrik Uzaylar Devamı

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 2

Tanım 1.9 (X,d) bir metrik uzay ve $K \subset X$ olsun. Eğer K nın tümleyeni açık ise, K ya X de **kapalıdır** denir. Yani, K kapalı $\Leftrightarrow X \setminus K = K^c$ açık.

Teorem 1.10 (X,d) bir metrik uzay ve fl $=\{A_i\}_{i \in I}$ X in açıklar ailesi olsun. Bu durumda $\{A_i\}_{i \in I}$ açıklar ailesi aşağıdaki şartları sağlar:

a) $\varnothing$ ve X açık kümelerdir,
b) Sonlu sayıdaki herhangi açık kümelerin arakesiti açık bir kümedir,
c) Keyfi sayıdaki açık kümelerin birleşimi açık bir kümedir.

Sonuçlar 1.11

a) X=R, $x \in R$ ve d, R nın alışılmış metriği olsun. Örnek 1.6 dan x in B(x,r) açık yuvarı (x-r,x+r) açık aralığı olduğundan R nın (a,b) şeklindeki her açık aralığı R de açık bir kümedir. Böylece R de ayrık açık aralıkların sayılabilir her birleşimi açık bir kümedir. Bunun terside doğrudur. Yani, R deki her açık küme ayrık açık aralıkların sayılabilir bir birleşimidir. Gerçekten $A \subset R$ açık bir küme ve x, $y \in A$ olsun. $x \sim y \Leftrightarrow \exists (a, b)$açık aralığı var $\ni \{x,y\} \subset (a,b) \subset A$ şeklindeki bağıntı A da bir denklik bağıntısıdır. Böylece denklik sınıfları ayrık açık aralıklar olup, birleşimleri A kümesini verir öyle ki her birisi farklı rasyonel sayı içerdiğinden sayılabilirdir.

b) Sonsuz çoklukta açıkların arakesiti açık olmak zorunda değildir. Gerçekten; R nın alışılmış metriğine göre, n = 1, 2, ... için $A_n = (-\frac{1}{n}, \frac{1}{n})$ açıklardır. Fakat $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \{0\}$ R nın açık bir altkümesi değildir. Çünkü R de tek nokta kümeleri kapalıdır. Gerçekten, $\{0\}^c = (-\infty,0) \cup (0,\infty)$ dır.

c) (X,d) ayrık metrik uzay ve $0< r \leq 1$ olsun. Bu durumda her $x \in X$ noktasının $B(x,1)$ açık komşuluğu $\{x\}$ tek nokta kümesine eşittir. Böylece X in her bir tek nokta altkümesi açık olduğundan bu tek nokta kümelerinin birleşimi olan X in her hangi altkümesi de açıktır. Eğer $r> 1$ ise $B(x,r) = X$ dır. Ayrıca $r\geq 1$ ise $B[x,r] = X$, $r<1$ ise $B[x,r]= \{x\}$ ve $r\neq 1$, $r\in R^+$ ise $S(x,r)=\varnothing$ ve $r = 1$ ise $S(x,r) = X\setminus\{x\}$ olur.

Teorem 1.12 (X,d) ve (Y,d′) metrik uzaylar, $x_0\in X$ ve $f:X\rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda f nın x_0 da sürekli olması için gerek ve yeter şart Y de $f(x_0)$ ı içeren her bir V açığı için, $f(U) \subset V$ olacak şekilde X de x_0 ı içeren bir U açığının var olmasıdır.

İspat: f, x_0 da sürekli, $f(x_0)\in V$ ve V, Y de açık olsun. Tanım 1.7 den $B_{d'}(f(x_0),\varepsilon))\subset V$ olacak şekilde $f(x_0)$ in ε-komşuluğu vardır. f sürekli olduğundan x_0 in $B_d(x_0,\delta)$ komşuluğu var öyle ki $f(B_d(x_0,\delta)) \subset B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$. dır. $U= B_d(x_0, \delta)$ alınırsa $f(U)\subset V$ olur.

Tersine olarak, her bir $f(x_0)\in V\subset Y$ açığı için $x\in U\subset X$ açığı var öyle ki $f(U)\subset V$ olsun. Verilen her $\varepsilon >0$ için $B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)=V$ alalım. $f(U)\subset V$ olacak şekilde x i içeren U açığı vardı.$x_0\in U$ ve U açık olduğundan (tanım 1.7) $B_d(x_0,\delta) \subset U$ olacak şekilde x in $B_d(x_0,\delta)$ komşuluğu vardır. Bu durumda $f(B_d(x_0,\delta)) \subset B_{d'}(f(x_0),\varepsilon)$. olur. Böylece f, x_0 noktasında süreklidir.

Uzaklık fonksiyonun karşımıza çıkardığı teorem 1.10 daki özellikleri sağlayan açıklar ailesinin olduğu her uzayda artık fonksiyonların sürekliliğinden söz edilebilir. Ayrıca bundan sonraki bölümde verilecek olan topolojik uzay kavramında Teorem 1.10 daki açıkların temel özellikleri kullanılacaktır.

Teorem 1.13 (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Bu durumda d metriğinin A ya kısıtlaması olan $d^*=d|A:AxA \to R$ fonksiyonu A üzerinde bir metriktir.

İspat: İspat açıktır. Gerçekten, $\forall x,y,z \in A$ için $x,y,z \in X$ olduğundan $d^*=d|A$ fonksiyonunun (m_1), (m_2), (m_3) ve (m_4) şartlarını sağladığı hemen görülür.

Tanım 1.14 (X,d) bir metrik uzay ve $A \subset X$ olsun. Teorem 1.13 ile elde edilen (A,d^*) metrik uzayına (X,d) uzayının bir **alt uzayı** denir.

Tanım 1.15 (X,d) bir metrik uzay ve A ile B, X in boş olmayan iki altkümesi olsun.

$$d(A,B) = \inf\{d(x, y): x \in A,\ y \in B\}$$

sayısına A ile B kümeleri arasındaki **uzaklık** denir. Yani A ile B nın noktaları arasındaki uzaklıkların oluşturduğu kümenin **en büyük alt sınırı (ebas)** olarak tanımlanır. Eğer, özel olarak $A=\emptyset$ veya $B=\emptyset$ ise, $d(\emptyset, B) = \infty$ veya $d(A, \emptyset) = \infty$ olarak kabul edilir.

Eğer A={x} ise,

$$d(x,B) = \inf\{d\ (x,y): y \in B\}$$

sayısına x noktasının B kümesine **uzaklığı** denir. Yani

$$d(x,B) = \text{ebas}\{d(x, y): y \in B\}.$$

A kümesinin noktaları arasındaki uzaklıkların oluşturduğu kümenin **en küçük üst sınırına (eküs)** A nın **çapı** denir ve

$$d(A)=\sup\{d(x, y): x,y \in A\}$$

şeklinde yazılır.

Çapı sonlu ($d(A) < \infty$) olan kümelere **sınırlı** kümeler, çapı sonsuz ($d(A)=\infty$) olan kümelere **sınırsız** kümeler denir. Eğer A kümesi sonlu ise, A nın çapı $d(A)=\max\{d(x,y):x,y \in A\}$ olacağından A sınırlıdır. Ayrıca $A \subset \bar{B}(x,r)$ olacak şekilde $x \in X$ ve bir $r > 0$ sayısı varsa, A ya sınırlı küme denir. Bir başka deyimle $\exists x \in X$ ve $\exists\ r > 0$ var $\ni$ $\forall a \in A$ için $d(x,a) \leq r$ ise, $A \subset X$ sınırlıdır.

Örnekler 1.16

a) (X,d) ayrık metrik uzay ve A ile B boş olmayan X in iki altkümesi olsun. Bu durumda

$$d(A,B)=\begin{cases}1 & , \quad A\bigcap B=\varnothing \\ 0 & , \quad A\bigcap B\neq\varnothing\end{cases}$$

dır.

İki kümenin arasındaki uzaklık sıfır ise, bu kümelerin arakesitlerinin boştan farklı olması gerekmez. Gerçekten, d, R nın alışılmış metriği olmak üzere

$$A=\{\tfrac{1}{n} : n \geq 1, n\in N\},\ B=\{-\tfrac{1}{n} : n \geq 1, n\in N\}$$

R nın iki altkümesi olsun. Bu durumda

$$d(A,B) = \inf\{d(x,y): x\in A, y\in B\} = \inf\{d(\tfrac{1}{n}, -\tfrac{1}{n})=\left|\tfrac{1}{n}-(-\tfrac{1}{n})\right|\} = \inf\{\tfrac{2}{n}\}=0$$

dır. Fakat $A\cap B=\varnothing$ dır.

b) (X,d) ayrık metrik uzay, $A \subset X$ ve $x \in X$ olsun. Bu durumda

$$d(x, A) = \begin{cases} 1, & x \notin A \\ 0, & x \in A \end{cases}$$

dır. Ancak $x \in A$ iken $d(x,A) = 0$ olmasına rağmen, $d(x,A) = 0$ olması x in A ya ait olmasını gerektirmez. Gerçekten; (R, d) alışılmış metrik uzayında $A = (1,3] \subset R$ için $d(1, A) = 0$ dır.

c) d, R^2 nın alışılmış metriği ve $A=\{(x,y): x^2+y^2 = 4\} \subset R^2$ olsun. Bu durumda $d(A)= 4$ dır. Ayrıca dikdörtgenin çapı köşegeni, elipsin çapı büyük eksen uzunluğudur.

$A=\{x\} \Leftrightarrow d(A)=\sup\{d(x,x): x \in \{x\}=A\}=0$ ve $A=\emptyset \Rightarrow d(\emptyset) = -\infty$ olarak kabul edilir.

d) Her açık yuvar sınırlıdır. Gerçekten, $\exists x_0 \in X$ ve $\exists r > 0$ için $B(x_0,r) \subset \bar{B}(x_0,r)$ dır.

Tanım 1.17 X kümesi üzerinde d, d′ ve d″ üç metrik ve $\lambda > 0$, $\gamma > 0$ reel sayılar olsun. Eğer $\forall x,y \in X$ için

$$\lambda\, d''(x, y) < d'(x, y) < \gamma\, d(x, y)$$

bağıntısı varsa, bu metriklere **denk metrikler** denir.

Tanım 1.18 $X \neq \varnothing$ kümesi üzerinde d ve d′ metrikleri verilmiş olsun. X deki d-açık kümeleri d′-açık ve d′-açık kümeleri de d-açık ise, d ve d′ metriklerine **denk** (yada eşdeğer) **metrikler** denir.

Örnek 1.19 R^2 üzerinde $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2) \in R^2$ olmak üzere,

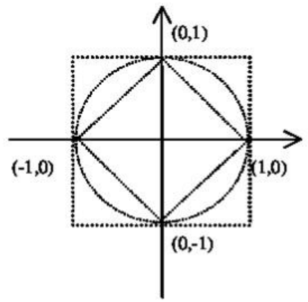
$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,,$$

$$d_1(x,y)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|,$$

$$d_2(x,y)=\max\{|x_1y_1|,|x_2-y_2|\}$$

metriklerine göre $d_1(x,y) \leq d(x,y) \leq d_2(x,y)$ olduğu, $(0,0)\in R^2$ noktasının r=1 olması halinde, şekil 1.3 den açıktır. Genel olarak da;

$$B_{d_1}(x,r) \subset B_d(x, r) \subset B_{d_2}(x,r) \text{ dır.}$$



Şekil 1.3

Tanım 1.20 (X,d) ve (Y,d′) iki metrik uzay olsun. $\forall x,y\in X$ için X den Y ye $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$ olacak şekilde bire-bir f fonksiyonu varsa, f fonksiyonuna bir **izometri** denir. Yani izometri uzaklığı koruyan bire-bir bir fonksiyondur.

Eğer f izometrisi üzerine ise, X ve Y metrik uzaylarına **izometriktir** denir. Ayrıca, kolayca gösterilebilir ki; metrik uzaylar ailesinde izometrik olma bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

Örnek 1.21 d ve d′, R ve R^2 nın sırasıyla alışılmış metrikleri ve $f:(R,d)\to(R^2,d')$ fonksiyonu $\forall x\in R$ için $f(x) = (x,0)$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu durumda f fonksiyonu hem bire-bir ve hem de $d'(f(x),f(y))=d(x,y)$ olduğundan f bir izometridir. Ancak R, R^2 ye izometrik değildir. Yine $X\neq\varnothing$ ve $Y\neq\varnothing$ kümeleri üzerinde sırasıyla,

$$d(x,x') = \begin{cases} 0, & x = x' \\ 1, & x \neq x' \end{cases} \quad \text{ve} \quad d'(y,y') = \begin{cases} 0, & y = y' \\ 2, & y \neq y' \end{cases}$$

ayrık metrikleri verilmiş olsun. Bu durumda (X,d) ve (Y,d′) metrik uzayları izometrik değildir. Çünkü bu uzaylar arasında uzaklığı koruyan bir fonksiyon yoktur. Fakat bu metrikler denktir.

Tanım 1.22 (X,d) bir metrik uzay ve N doğal sayılar kümesi olsun. $\forall n\in N$ için $f(n) = x_n\in X$ olmak üzere $f : N\to X$ şeklindeki her fonksiyona X metrik uzayında bir **dizi** denir ve $(x_n)_{n\in N}$ veya kısaca (x_n) ile gösterilir.

Tanım 1.23 (X,d) bir metrik uzay, (x_n) X de bir dizi $x_0\in X$ olsun. Her $r>0$ sayısına karşılık $n \geq n_0$ iken $d(x_n,x_0) < r$ olacak şekilde r ye bağlı bir $n_0\in N$ sayısı varsa, (x_n) dizisi x_0 a **yakınsıyor** denir ve $x_n\to x_0$ veya $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x_0$ şeklinde yazılır.

Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 \Leftrightarrow \forall r > 0 \text{ için } \exists n_0(r)\in N \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow d(x_n,x_0) < r,$$

$$\Leftrightarrow \forall B(x_0,r) \text{ için } \exists\, n_0(r)\in N \ni \forall n \geq n_0 \Rightarrow x_n\in B(x_0,r).$$

Bu tanımda anlaşılan, verilen dizinin n_0 ci teriminden sonraki dizinin bütün elemanları x_0 in r-komşuluğu içinde kalıyor iken, dizinin sonlu sayıdaki terimi x_0 in r-komşuluğu dışında kalır.

Örnek 1.24 Örnekler 1.3 de ki (a), (c) ve (d) de tanımlanan R^2 deki d, d_1 ve d_2 metrikler olsun. Ayrıca R^2 de bir dizi $(x_n)=(1,\frac{1}{n})$ şeklinde tanımlanmış olsun. Bu (x_n) dizisi d, d_1 ve d_2 metriklerine göre (1, 0) noktasına yakınsar. Gerçekten,

$$d(x_n, (1,0)) = d_1(x_n, (1,0)) = d_2(x_n, (1,0)) = \frac{1}{n},\ n\in N$$

olup, verilen her r >0 sayısı için n_0 ı $\frac{1}{\varepsilon}$ dan büyük bir tamsayı olarak alırsak, $\forall n \geq n_0$ olduğunda $d(x_n,(1,0)) = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon$ olur. Bu da (x_n) dizisinin (1,0) noktasına yakınsadığını gösterir.

Eğer r yi $0<r<1$ aralığında alır ve R^2 deki ayrık metriği de d^* ile gösterirsek, $B_{d^*}((1,0),r)$ komşuluğu sadece (1,0) noktasını içerir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin bütün elemanları bu komşuluğun dışında kalır. Yani dizi ayrık metriğe göre yakınsak değildir.

Tanım 1.17′ X kümesi üzerinde d ve d′ iki metrik olsun. Eğer

$$d(x_n,x_0)\to 0 \Leftrightarrow d'(x_n,x_0)\to 0$$

şartı sağlanır ise d ve d' metriklerine denk metrikler denir. Örneğin; X kümesi üzerinde d bir metrik olsun. $\forall x,y \in X$ için $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)}$ şeklinde tanımlanan d' metriği X üzerinde d ye denk (yada eşdeğer) bir metriktir. Gerçekten, eğer $d(x_n,x_0)\to 0$ ise $d'(x,y) = \dfrac{d(x,y)}{1+d(x,y)} \to 0$ dır. Tersine, $d(x,y) = \dfrac{d'(x,y)}{1-d'(x,y)}$ olduğu açıktır. Böylece $d'(x_n,x_0)\to 0$ olduğundan $d(x_n,x_0)\to 0$ dır. O halde, d ve d' metrikleri denk metriklerdir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Matematik

Metrik Uzaylar Devamı

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 2