



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Matematik
Metrik Uzaylar

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 1

METRİK UZAYLAR

1.1 Metrik Uzay Kavramı

Metrik veya metrik uzay kavramı, klasik analizden modern analize geçiş sağlayan çok önemli bir köprüdür. Öyle ki reel ve kompleks teorilerde bilinen bir çok önemli özelliklerin herhangi bir uzayda nasıl yapılacağını bize gösterir. Ayrıca topolojide soyut olan bir takım kavramlar, metrik uzaylarda daha somut kavramlarla açıklama imkanını sağlar. Bu nedenle metrik ve metrik uzay kavramını tanımlayarak, metrik uzaylara ait bazı önemli özellikleri vermek yerinde olacaktır.

Tanım 1.2 Boş olmayan bir X kümesi ve $X \times X$ den $\mathbb{R}$ nin içine tanımlanan bir d fonksiyonu aşağıdaki şartları sağlıyorsa, d ye X üzerinde bir **metrik**, (X,d) ikilisine de **metrik uzay** denir:

$\forall x,y,z \in X$ için,

$$m_1) d(x,y) \geq 0$$

$$m_2) d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x=y$$

$$m_3) d(x,y) = d(y,x)$$

$$m_4) d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z).$$

d fonksiyonu m_1 , m_3 ve m_4 aksiyomları ile birlikte (m_2^*) $x=y \Rightarrow d(x,y) = 0$ şartını sağlıyorsa d ye **metrikimsi** (pseudometric), (X,d) ikilisine de **metrikimsi uzay** denir. Metrik uzaylar için verilecek bir çok sonuç metrikimsi uzaylar içinde doğrudur.

Metrik aksiyomları birbirinden bağımsız değildir . Şöyle ki; (m_4) aksiyomuna önce (m_2) , sonrada (m_3) ü uygularsak (m_1) aksiyomu elde edilir.

$$d(x,z) \leq d(x,y)+d(y,z) \Rightarrow 0=d(x,x) \leq d(x,y)+d(y,x)=2d(x,y) \Rightarrow d(x,y) \geq 0.$$

Eğer X kümesi üzerinde tanımlanan d metriğinin bir başkasıyla karışma durumu yoksa, (X,d) metrik uzayı kısaca X metrik uzayı olarak ifade edilir.

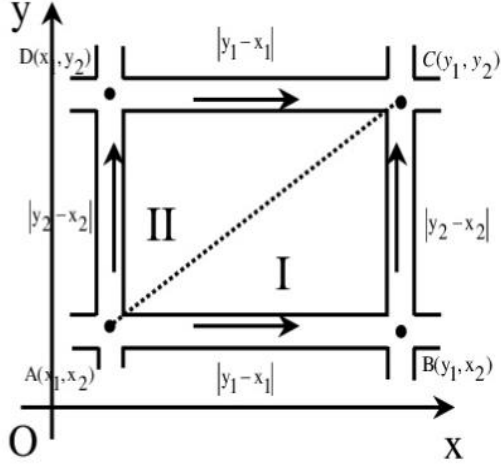
Örnekler 1.3

a) $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesi olsun. $\mathbb{R}$ üzerinde her $x, y \in \mathbb{R}$ için $d: \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $d(x, y) = |x - y|$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonunun metrik şartlarını sağladığı açıktır. Bu metriğe reel sayıların (reel doğrunun) mutlak değer veya **alışılmış metriği** denir.

b) $\mathbb{R}$ nın kendisiyle kartezyen çarpımı olan $\mathbb{R} \times \mathbb{R} = \mathbb{R}^2$ üzerinde, yani düzlemde $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için $d(x, y) = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonuna $\mathbb{R}^2$ nın alışılmış metriği veya **Öklid metriği** denir.

Benzer şekilde $\mathbb{R}^n = \mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ olmak üzere, her $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için $d(x, y) = \left(\sum_{i=1}^n (x_i - y_i)^2 \right)^{1/2}$ şeklinde tanımlanan d fonksiyonu da $\mathbb{R}^n$ nın alışılmış metriğidir.

c) Caddeleri birbirine dik ve paralel olan, düzenli bir plana sahip bir şehrin farklı iki noktasında bulunan bir kuşla bir insan , bu noktalardan birinden diğerine gitmek için kuş öklid metriğini kullanırken , taksi ile gitmek isteyen insan öklid metriğinden başka bir metrik kullanmak zorundadır (şekil 1.1).



Şekil 1.1

Taksinin A dan C ye gitmesi için $|AB| + |BC|$ yolunu veya $|AD| + |DC|$ yolunu izlemesi gerekir. Bu durumda taksinin alacağı yol uzaklık fonksiyonu cinsinden yazacak olursak

$$d_1(x, y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$$

şeklinde olur. Kolayca gösterilebilir ki d_1 fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. Bu metriğe R^2 de **taksi-kab** (taxi-cab) metriği denir. R^2 de tanımlanan bu metrik R^n de şöyle tanımlanır:

$$\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in R^n \text{ için } d_1(x, y) = \sum_{i=1}^n |x_i - y_i| .$$

d) $\mathbb{R}^2$ de bir başka uzaklık fonksiyonu $\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$ için

$$d_2(x, y) = \max\{|x_1 - y_1|, |x_2 - y_2|\}$$

şeklinde tanımlanabilir. Gösterilebilir ki d_2 fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. $\mathbb{R}^2$ de tanımlanan bu d_2 metriği $\mathbb{R}^n$ de $\forall x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$ için

$$d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}$$

şeklinde tanımlanabilir. d_2 fonksiyonu metrik şartlarını sağlar. Gerçekten,

$m_1)$ $d_2(x, y) \geq 0$ dır. Çünkü $i=1, 2, \dots, n$ için $|x_i - y_i| \geq 0 \Rightarrow \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \geq 0$.

$m_2)$ $d_2(x, y) = \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = 0 \Leftrightarrow |x_i - y_i| = 0, (i = 1, 2, \dots, n)$

$$\Leftrightarrow x_i - y_i = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Leftrightarrow x_i = y_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$\Leftrightarrow x = y.$$

$$\begin{aligned} m_3) d_2(x,y) &= \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = \max\{|(-1)(y_i - x_i)| : 1 \leq i \leq n\} \\ &= \max\{|(y_i - x_i)| : 1 \leq i \leq n\} = d_2(y, x). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_4) d_2(x,y) &= \max\{|x_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} = \max\{|x_i - z_i + z_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| + |z_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\} \\ &\leq \max\{|x_i - z_i| : 1 \leq i \leq n\} + \max\{|z_i - y_i| : 1 \leq i \leq n\}. \end{aligned}$$

O halde d_2 fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ de bir metrik olup, bu metriğe **maksimum metrik** denir.

Not: $\mathbb{R}^n$ de tanımlanan d , d_1 ve d_2 metrikleri $n=1$ olması halinde eşit, $n \geq 2$ halinde farklıdırlar. Gerçekten $x=(1,1)$, $y=(0,0)$ için $d(x,y) = \sqrt{2}$, $d_1(x,y) = 2$, $d_2(x,y) = 1$ dir.

e) $X \neq \emptyset$ herhangi bir küme ve $d: X \times X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$d(x,y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases}$$

olsun. Bu şekilde tanımlanan d fonksiyonu X üzerinde bir metriktir. Gerçekten; $\forall x, y \in X$ için $d(x,y) = 0$ veya $d(x,y) = 1$ olduğundan $d(x,y) \geq 0$ dır. O halde (m_1) sağlanır. $d(x,y)=0 \Leftrightarrow x=y$ olduğundan (m_2) nin sağlandığı açıktır. $d(x,y)=d(y,x)$ olması d nın tanımından açıktır. O halde, (m_3) sağlanır.

$x, y, z \in X$ farklı noktalar ise, $d(x,y) = 1$, $d(x,z) = 1$ ve $d(z,y) = 1$ dır. O halde

$$d(x,y) = 1 < d(x,z) + d(z,y) = 1 + 1 = 2.$$

$x, y, z \in X$ noktaları eşit ise $d(x,y) = d(x,z) + d(z,y)$ olur. Böylece (m_4) şartı sağlanır.

Bu şekilde tanımlanan metriğe **ayrık (diskret) metrik** denir.

f) $X \neq \emptyset$ bir küme ve $\forall x, y \in X$ için $d(x, y) = 0$ ise d , X üzerinde metrik olmayıp, bir metrikimsidir. Bu metriğe **aşık** **metrikimsi** denir.

Analizde, $\mathbb{R}$ den $\mathbb{R}$ ye tanımlanan bir reel değişkenli, reel değerli bir f fonksiyonun verilen bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasında sürekli olması şöyle tanımlanmaktadır:

$$f, x_0 \text{ da sürekli} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon .$$

Burada $\mathbb{R}$ nın alışılmış metriği kullanılmıştır. Soyut metrik uzaylarda verilen bir fonksiyonun sürekliliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.4 (X,d) ve (Y,d') metrik uzaylar, $x_0 \in X$ ve $f:X \rightarrow Y$ bir fonksiyon olsun. Verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $d(x, x_0) < \delta$ olduğunda $d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon$ olacak şekilde ε a bağlı pozitif bir δ sayısı varsa, f fonksiyonuna x_0 noktasında **süreklidir** denir. Yani,

$$f, x_0 \in X \text{ da sürekli} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni d(x, x_0) < \delta \Rightarrow d'(f(x), f(x_0)) < \varepsilon .$$

Eğer $f:X \rightarrow Y$ fonksiyonu $\forall x \in X$ noktasında sürekli ise, f fonksiyonuna X uzayında **süreklidir** denir.

Tanım 1.5 (X,d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve $r > 0$ bir reel sayı olsun. Bu durumda

$$B_d(x_0, r) = \{ x \in X : d(x, x_0) < r \}$$

kümesine x_0 merkezli ve r yarıçaplı **açık yuvar** (veya x_0 in **r-açık komşuluğu**),

$$\bar{B}_d(x_0, r) = \{ x \in X : d(x, x_0) \leq r \}$$

kümesine, x_0 merkezli ve r yarıçaplı **kapalı yuvar** ve

$$S_d(x_0, r) = \{ x \in X : d(x, x_0) = r \}$$

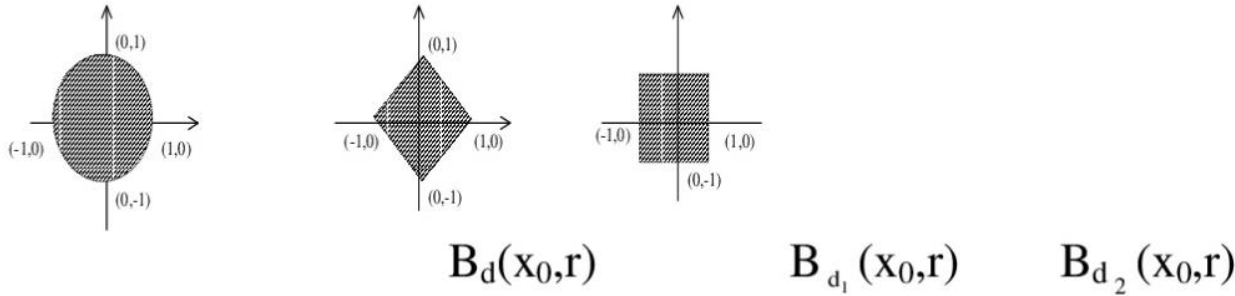
kümesine de x_0 merkezli ve r yarıçaplı **yuvar yüzeyi** denir. Eğer d metriğinin başkasıyla karışma durumu yoksa $B_d(x_0, r)$ yerine $B(x_0, r)$ alınır.

Örnek 1.6 $X = \mathbb{R}^2$, $x_0 = (0,0) \in \mathbb{R}^2$ ve $r=1$ olsun. d , d_1 ve d_2 $\mathbb{R}^2$ nin sırasıyla

Örnek 1.6 $X=\mathbb{R}^2$, $x_0=(0,0)\in\mathbb{R}^2$ ve $r=1$ olsun. d , d_1 ve d_2 $\mathbb{R}^2$ nin sırasıyla

alışılmış, taksı-kab ve maksimum metrikleri ise, bunlara karşı gelen açık yuvarların şekilleri aşağıdaki gibidir:

Şekil 1.2



Eğer $X=\mathbb{R}$, $x_0\in\mathbb{R}$ ve d de $\mathbb{R}$ nin alışılmış metriği ise, bu durumda $B(x_0, r)$ açık yuvarı $\mathbb{R}$ de açık aralık, $\bar{B}(x_0, r)$ kapalı yuvarı $\mathbb{R}$ de kapalı aralık ve $S(x_0, r)$ yuvar yüzeyi (veya küre yüzeyi) ise, $\mathbb{R}$ de iki elamanlı bir kümedir. Gerçekten;

$$B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$$

$$\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| \leq r\} = \{x \in \mathbb{R} : x_0 - r \leq x \leq x_0 + r\} = [x_0 - r, x_0 + r],$$

$$S(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| = r\} = \{x \in \mathbb{R} : x = x_0 - r, x = x_0 + r\} = \{x_0 - r, x_0 + r\}.$$

Tanım 1.4' $(X,d), (Y,d')$ metrik uzaylar, $f:X \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve $x_0 \in X$ olsun. Eğer her bir $\varepsilon > 0$ sayısı için $x \in B(x_0, \delta)$ olduğunda $f(x) \in B(f(x_0), \varepsilon)$ olacak şekilde bir $\delta > 0$ sayısı varsa, **f fonksiyonuna x_0 da süreklidir** denir. Yani,

$$f, x_0 \in X \text{ da sürekli} \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists \delta(\varepsilon) > 0 \ni f(B_d(x_0, \delta)) \subset B_{d'}(f(x_0), \varepsilon).$$

Metrik uzaylarda verilen bir fonksiyonun sürekliliğini açık kümelerle tanımlamak için, komşuluk kavramı ile çok yakın ilişkisi olan açık küme kavramı, aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 1.7 (X, d) bir metrik uzay, $A \subset X$ ve $x \in A$ olsun. Eğer $B(x, r) \subset A$ olacak şekilde pozitif bir r sayısı varsa x e A nın bir **iç noktası** denir. Bütün noktaları iç nokta olan bir kümeye **açık küme** denir. Yani,

$$\begin{aligned} x, A \text{ nın iç noktası} &\Leftrightarrow \exists B(x, r) \text{ açık yuvarı var } \ni B(x, r) \subset A, \\ A \text{ açıktır} &\Leftrightarrow \forall x \in A \text{ için } \exists B(x, r) \text{ açık yuvarı var } \ni B(x, r) \subset A. \end{aligned}$$

Teorem 1.8 (X, d) bir metrik uzay, $x_0 \in X$ ve r pozitif bir sayı olsun. Bu durumda $B(x_0, r)$ açık yuvarı açık bir kümedir.

İspat: $x \in B(x_0, r)$ keyfi bir nokta olsun. $B(x_0, r)$ nın tanımından $d(x_0, x) < r$ dır. $0 < \rho < r - d(x_0, x)$ şartını sağlayan ρ sayısını alalım. Bu durumda $B(x, \rho) \subset B(x_0, r)$ dır. Gerçekten, $\forall y \in B(x, \rho)$ için x_0, x ve $y \in X$ olduğundan

$$d(x_0, y) \leq d(x_0, x) + d(x, y) < d(x_0, x) + \rho < r$$

elde edilir. O halde $y \in B(x_0, r)$ dır. Böylece $B(x, \rho) \subset B(x_0, r)$ dır. $x \in B(x_0, r)$ noktası keyfi olduğundan $\forall x \in B(x_0, r)$ için $\exists B(x, \rho) \text{ var } \ni B(x, \rho) \subset B(x_0, r)$ olur. O halde $B(x_0, r)$ açık bir kümedir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



15

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Matematik

Metrik Uzaylar

Teşekkürler

Doç. Dr. Servet KÜTÜKÇÜ

Ders 1