ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Değişim Oranı Olarak Türev

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik

Türevin ve Diferansiyelin Geometrik Yorumları

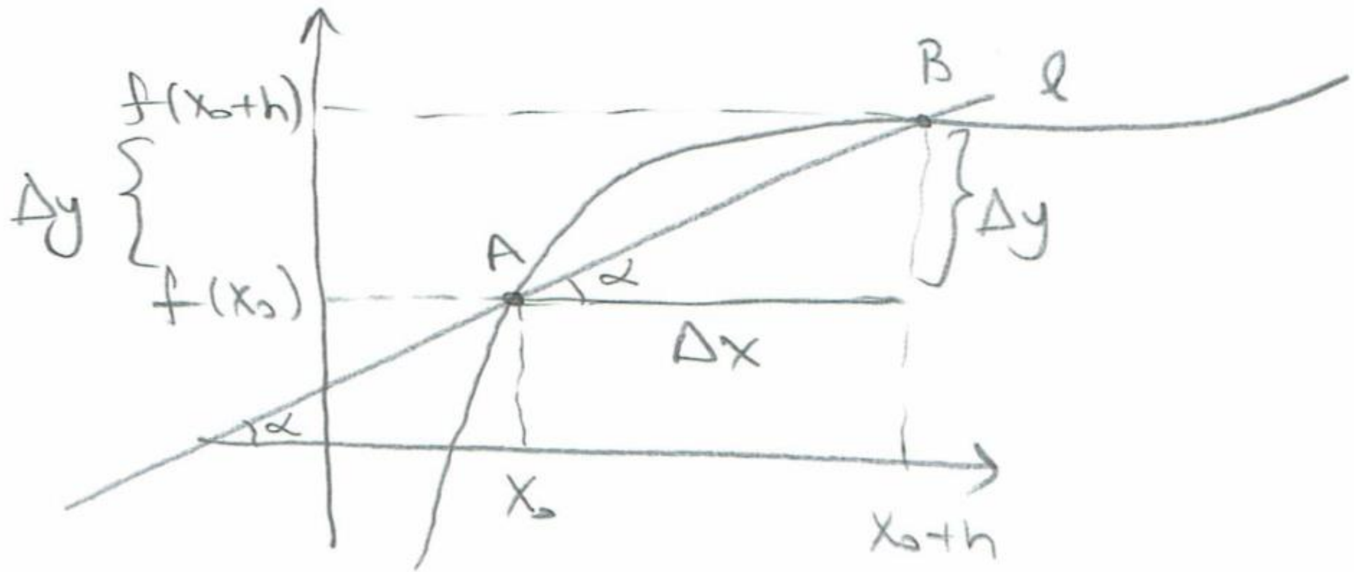
$y=f(x)$ fonksiyonu bir $x_0 \in \mathbb{R}$ noktasının δ-komşuluğunda tanımlı ve türevlenebilir olsun. Şimdi x_0'a h artırımı yapalım, ve fonksiyondaki değişimi $\Delta y = \Delta f(x)$ ile gösterelim. Buradan

$$\Delta x = (x_0+h) - x_0 = h$$
$$\Delta y = f(x_0+h) - f(x_0)$$

$$\frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

olarak bulunur.

$A(x_0, f(x_0))$, $B(x_0+h, f(x_0+h))$ noktalarından geçen l doğrusunu alalım.



l doğrusunun x ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı α ise $\tan\alpha = \dfrac{\Delta y}{\Delta x}$ dir.

B noktasını A noktasına yaklaştırırsak yani $h \to 0$ götürürsek l doğrusu A noktasında f nin grafiğine teğet olan doğru olur. Bu teğet doğrusu için limit $h \to 0$ değişir.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x)}{h}$$ olur. Bu ise türev tanımında $f'(x_0)$ a eşittir. Sonuç olarak $y=f(x)$ eğrisine x_0 apsisli noktada çizilen teğetin eğimi o noktadaki türevidir. $f'(x_0)=m_{x_0}$ dir. Buna göre $y=f(x)$ eğrisine x_0 apsisli noktada teğet olan doğru denklemi

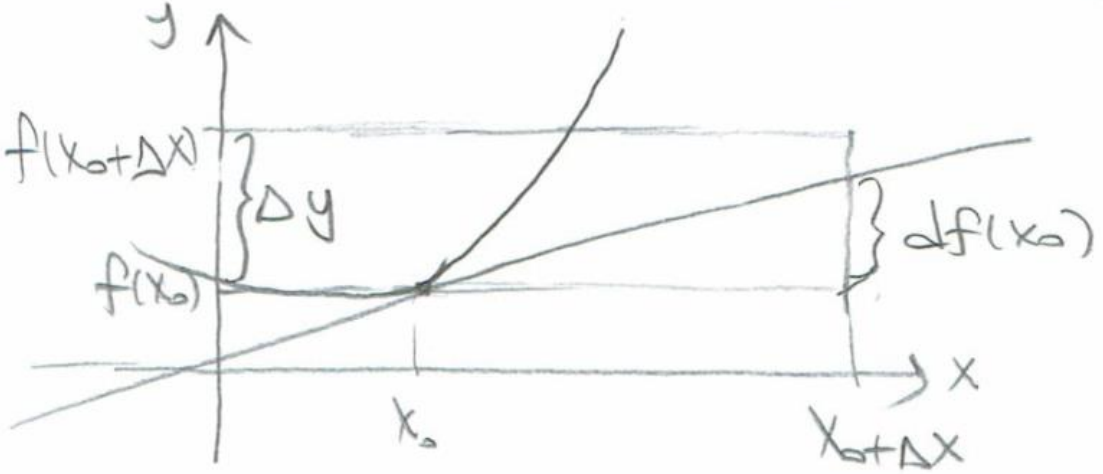
$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

dır.

Bu teğet doğrusunun denklemi ile fonksiyonun x_0 noktasındaki lineerleştirmesi aynı şeydir.

$y=f(x)$ fonksiyonunun $x_0 \in D_f$ noktasındaki diferansiyelinin

$$df(x_0) = f'(x_0)\,dx$$ olduğunu biliyoruz.



Yani diferansiyel teğetin değişim oranıdır.

Örnek: $y=x^2+3x-2$ eğrisinin $x_0=0$ apsisli noktasındaki teğetinin veya lineerleştirmesinin denklemi nedir.

$$y'=2x+3 \qquad y'(0)=m_T=3$$

$x=0$ için $y=-2$ $\quad (0,-2)$ noktasında

$$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)$$
$$L(x)=-2+3x$$

Tanım: Bir f fonksiyonunun teğetinin bulunduğu ilgili noktada teğete dik olan doğruya fonksiyonun o noktadaki normali denir. Normal doğrusunun eğimi m_N ile gösterilir. Ayrıca $m_T \cdot m_N = -1$ dir.

Örnek: $y=(x^2+8x-1)^{1/3}$ eğrisinin $x_0=1$ noktasındaki normalinin denklemi?

$x_0=1$ için $y_0=2$

$$y'=\frac{1}{3}(x^2+8x-1)^{-2/3}(2x+8)$$

$m_T=y'(1)=\frac{5}{6}$ $\quad m_T \cdot m_N=-1 \Rightarrow m_N=-\frac{6}{5}$

Normalin denklemi $y-2=-\frac{6}{5}(x-1)$ dir.

Örnek: $x=\frac{1}{t^2}$, $y=t^3+1$ fonksiyonunun $x=1$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{3t^2}{-2t^{-3}} = -\frac{3}{2}t^5 \qquad x=1 \text{ için } \frac{1}{t^2}=1,\ t=\mp 1$$

$m_{T_1} = -\frac{3}{2}$, $m_{T_2} = \frac{3}{2}$ olur.

$t=1$ için $x=1$ ve $y=2$ $(1,2)$, $m_{T_1}=-\frac{3}{2}$

$t=-1$ için $x=1$ ve $y=0$ $(-1,0)$, $m_{T_2}=\frac{3}{2}$

$$L(x) \cong 2+\left(-\frac{3}{2}\right)\cdot(x-1)$$

$$L(x) \cong 0+\left(\frac{3}{2}\right)(x-1)$$

Türev Yoluyla Belirsizliklerin Giderilmesi

L'Hopitâl kuralı: Limitte belirsizlikleri incelerken $\left[\frac{0}{0}\right]$, $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ şeklindeki belirsizliklerin eğer varsa değerini bulmak için zaman zaman çok fazla işlem yapmaya gerek duymuştuk. Şimdi bu tür belirsizliklerin daha pratik bir şekilde ortadan kaldırmak için kullanılan L'hopitâl kuralını vereceğiz.

Teorem: f ve g fonksiyonları için

1) $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ veya $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = \mp\infty$

2) f ve g fonksiyonları a nın delinmiş bir komşuluğunda türevlenebilir ve $\forall x$ için $g'(x) \neq 0$

3) $\lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti vardır

koşulları sağlanıyorsa

$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dir. Eğer belirsizlik yine ortadan kalkmamışsa kural uygulanmaya devam edilir.

Bu teoremde $x \to a$ yerine $x \to a^+$, $x \to a^-$, $x \to +\infty$ veya $x \to -\infty$ alındığında da kural geçerlidir.

UYARI: $\left[\frac{0}{0}\right]$ veya $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ belirsizlikleri haricinde L'Hopitâl kuralı uygulanmaz. Diğer belirsizlikler önce $\left[\frac{0}{0}\right]$ veya $\left[\frac{\infty}{\infty}\right]$ a dönüştürülür. Sonra bu kural uygulanır.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos 3x}{x^2} = \left[\dfrac{0}{0}\right]$

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos 3x}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{-3(-\sin 3x)}{2x} = \frac{3}{2} \lim_{x\to 0} \frac{\sin 3x}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$= \frac{3}{2} \cdot \lim_{x\to 0} \frac{3 \cdot \cos 3x}{1} = \frac{3}{2} \cdot 3 \cdot 1 = \frac{9}{2}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} (x \ln x) = ?$ $\quad [0 \cdot \infty]$

$$\lim_{x\to 0} x \ln x = \lim_{x\to 0} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0} -x = 0$$

Üstel Belirsizlikler

(0^0), (1^∞), (∞^∞) belirsizlikleri için oranan limite isim verilir ve her iki tarafın logaritması alınarak diğer belirsizliklere çevrilir.

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} x^x = ?$ (0^0) belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} x^x$$

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0} x^x\right) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \ln x^x$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}(x \cdot \ln x) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\ln x}{\frac{1}{x}}\right) = \left[\frac{\infty}{\infty}\right]$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}}\right) = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = e^0 \Rightarrow \boxed{y = 1}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} = ?$ (1^{∞}) belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}}$$

$$\ln y = \ln\left(\lim_{x\to 0} (1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} \right) \Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \left(\ln(1+\sin 2x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln(1+\sin 2x) \right) = \infty \cdot 0$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\sin 2x)}{x} = \left[\frac{0}{0}\right]$$

$$\ln y = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{2\cos 2x}{1+\sin 2x}}{1} = 2 \Rightarrow \ln y = 2 \Rightarrow y = e^{2}$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} = \infty^0$ belirsizliği

$$y = \lim_{x\to 0} x^{\frac{1}{x}} \Rightarrow \ln y = \ln\left(\lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \ln x^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\ln x = [0.\infty]$$

$$\Rightarrow \ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\ln x}{x} = \left[\frac{\infty}{\infty}\right] \quad \text{"L'Hop."}$$

$$\ln y = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = 0 \Rightarrow \ln y = 0 \Rightarrow y = 1$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} x^{\frac{1}{x}} = 1 \text{ dir.}$$

UYARI: 1^∞ belirsizliği için

$u(x) \to 0$ $\quad v(x) \to \infty$ olmak üzere

$$\lim_{x\to a} (1+u(x))^{v(x)} = e^{\lim_{x\to a} u(x)v(x)}$$ dir.

Örnek: $$\lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{1}{2x}\right)^{3x} = e^{\lim_{x\to\infty} \frac{3x}{2x}} = e^{\frac{3}{2}}$$

Örnek: $$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{3x-2}{3x+6}\right)^{12x-1} = \lim_{x\to\infty} \left(1+\frac{-8}{3x+6}\right)^{12x-1}$$

$$= e^{\lim_{x\to\infty} \frac{-96x+8}{3x+6}} = e^{-32}$$

bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Temel Bilim Dersleri Matematik

Dr. Öğretim Üyesi Fatma GÜLER