ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Değişim Oranı Olarak Türev

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik

Değişim Oranı olarak Türev

$y=f(x)$ şeklinde verilen bir fonksiyonda x'le yapılan bir h arttırımına karşılık fonksiyondaki değişim

$\Delta y = \Delta f(x)$ ise

$\Delta f = f(x+h) - f(x)$ dir. Ayrıca değişimlerin oranı

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \text{ dir.}$$

Bu oran f nin x ile $x+h$ arasındaki ortalama değişimdir.

Eğer $h \to 0$ giderken limiti alınırsa $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ değişimlerin oranı x noktasındaki anlık değişimi verir.

$$\lim_{h \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x) \text{ dir.}$$

Örnek: Bir dairenin alanı A ve çapı D olsun.

a) Çapın $D=2$ den $D=9$ e büyüdüğündeki ortalama alan değişimini

b) Çapın 10 olduğundaki alandaki anlık değişimin oranı nedir?

ÇÖZÜM: Dairenin alanı $A = \pi r^2$, çapı $D \Rightarrow r = \frac{D}{2}$

$$A = \pi \frac{D^2}{4}$$

a) $\dfrac{\Delta A}{\Delta D} = \dfrac{\frac{25}{4}\pi - \frac{4\pi}{4}}{5-2} = \dfrac{7\pi}{4}$

b) D=10 m olduğundaki anlık değişim oranı

$A'(D) = \dfrac{dA}{dD} = \dfrac{\pi D}{2}\Big|_{D=10} \cong 15.7$

<u>NOT</u>: Bir cismin yol denklemi $x(t)$ ise $[t_0, t_1]$ aralığında

$x'(t_1)$, t_1 anındaki anlık hızı, ortalama hızı
$x''(t_1)$, t_1 " ivmesini verir.

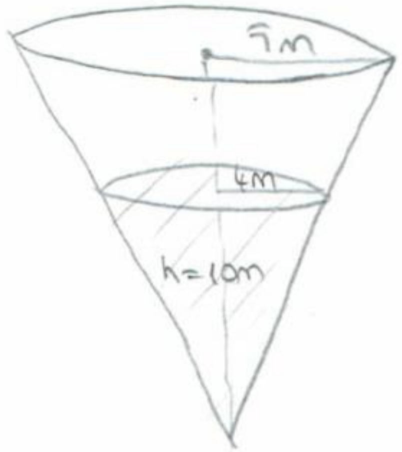
Bağıl Değişim Oranları

Değişim oranı bilinen bir veya birkaç değişkene bağlı bir değişkenin değişim oranının bulunmasına bağıl oran problemi denir.

Bağıl oran Probleminin Çözümünde İzlenecek Yol

1) Sabit ve değişkenler şekille belirtilir.
2) Verilen ve istenenler ± zaman parametresi ile yazılır.
3) Elde edilen denklem ve eşitsizlikler tek parametreye düştükten sonra türev alınır.

Örnek: Taban yarıçapı 5 m yüksekliği 10 m olan koni şeklindeki deponun tepesi aşağı bakmaktadır. Boş olan bu depoya 9 m^3/dk hızla su dolduruluyor. r=4 m olduğunda suyun yükseliş hızı nedir?



Yarıçap $0 \le r(t) \le 5$

Yükseklik $0 \le h(t) \le 10$

$\dfrac{dV}{dt} = 9\ m^3/dk$ $\dfrac{dr}{dt} \rightarrow$ yarıçap değişim hızı

$\dfrac{dh}{dt}$ yükseliş hızı

$V(t) = \dfrac{1}{3}\pi r^2(t)\, h(t)$ denklemini tek parametreye

düşürmeliyiz.

Şekilden

$$\frac{r(t)}{5} = \frac{h(t)}{10} \Rightarrow r(t) = \frac{h(t)}{2} \text{ yazılır}$$

$$V(t) = \frac{\pi}{3} \frac{h^2(t)}{4} \cdot h(t) = \frac{\pi}{12} h^3(t)$$

$$\Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{\pi}{12} \cdot 3h^2(t) \frac{dh}{dt} \qquad r=4 \text{ için } h=8 \text{ m}$$

$$9 = \frac{\pi}{4} \cdot 64 \cdot \frac{dh}{dt} \Rightarrow \frac{dh}{dt} = 0{,}1 \text{ m/dk.}$$

Örnek: Küresel bir balona $20 \text{ m}^3/\text{dk}$ oranıyla hava pompalanıyor. Yarıçap 3 m iken yarıçapın değişim oranı nedir?

Havanın $20 m^3/dk$ oranıyla pompalanıyor olması

$$\frac{dV}{dt} = 20\ m^3/dk \quad \text{dir.}$$

Yarıçap 3 m iken yarıçapın değişim oranının istenmesi

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = ?$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt} \Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{20}{4\pi r^2}$$

$$\left.\frac{dr}{dt}\right|_{r=3} = \frac{20}{4\pi \cdot 9} = \frac{5}{9\pi}\ m/dk.$$

Örnek! Bir küpün başlangıçta bir kenarının uzunluğu $x=32$ m dir. Kenarın uzunluğu 3 m/dk hızla küçülürse $x=5$m iken küpün yüzey alanının ve hacminin değişimini bulunuz.

$$\frac{dx}{dt} = -3 \text{ m/dk} \qquad \text{istenen } \left.\frac{dS}{dt}\right|_{x=5} = ? \quad \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=5} = ?$$

$$S = 6x^2 \qquad \frac{dS}{dt} = 12x \cdot \frac{dx}{dt}$$

$$\frac{dS}{dt} = 12 \cdot 5 \cdot (-3) = -180 \text{ m}^2/\text{dk}$$

Yüzey alanı dk.da $180m^2$ azalmaktadır.

$$V = x^3 \Rightarrow \frac{dV}{dt} = 3x^2 \frac{dx}{dt} \qquad \Rightarrow \left.\frac{dV}{dt}\right|_{x=5} = 3 \cdot 5^2 \cdot (-3)$$
$$= -225 \text{ m}^3/\text{dk}$$

Hacim dk.da $225 m^3$ azalmaktadır.

Örnek: Bir dikdörtgenin w eni 2cm/sn hızla artarken l boyu 2cm/sn hızla azalmaktadır.

$l = 12$ cm ve $w = 5$ cm olduğunda, dikdörtgenin alanının, çevresinin, köşegen uzunluğunun değişim hızlarını bulunuz.

$$\frac{dw}{dt} = 2\,cm/sn \qquad \frac{dl}{dt} = -2\,cm/sn$$

$$A = w \cdot l \Rightarrow \frac{dA}{dt} = w \cdot \frac{dl}{dt} + \frac{dw}{dt} l$$

$$\frac{dA}{dt} = 5 \cdot (-2) + 2 \cdot 12 = 14\,cm^2/sn$$ alanı artar.

$$Ç = 2(w+l) \Rightarrow \frac{dÇ}{dt} = 2\left(\frac{dw}{dt} + \frac{dl}{dt}\right) = 2(2-2) = 0 = sb$$

çevresi sabit kalır.

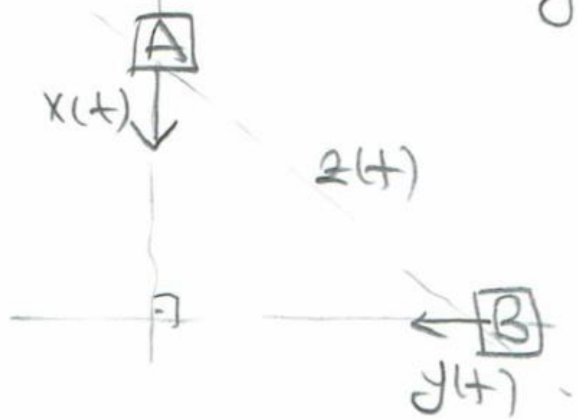
$$L = \sqrt{w^2 + l^2} \Rightarrow \frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}(w^2 + l^2)^{-1/2} \cdot \left(2w\frac{dl}{dt} + 2l\frac{d}{dt}\right.$$

$$\frac{dL}{dt} = \frac{1}{2}\left(5^2 + 12^2\right)^{1/2}\left(2 \cdot 5 \cdot 2 + 2 \cdot 12 \cdot (-2)\right)$$

$$= -\frac{14}{13} \text{ cm/sn}$$

köşegen uzunluğu azalır.

Örnek! Dik bir kavşakta A ve B araçları karşılaşıyor A 40 km/sa ve B ise 60 km/sa hızla hareket etmektedir. A 5 km ve B=12 km yol gittiklerinde araları̇ndaki uzaklığın değişim hızı nedir?



$$\frac{dx}{dt} = 40 \text{ km/sa}$$

$$\frac{dy}{dt} = 60 \text{ km/sa}$$

$$\frac{dz}{dt} = ?$$

$$x^2(t) + y^2(t) = z^2(t)$$

$$2x(t)\frac{dx}{dt} + 2y(t)\frac{dy}{dt} = 2z(t)\frac{dz}{dt}$$

$$2.5.40 + 2.12.60 = 2.13.\frac{dz}{dt} \Rightarrow \frac{dz}{dt} \cong 70 \text{ km/sa}$$

Örnek! Çapı 12 cm olan bir kürenin hacmindeki değişim hızı $9\,cm^3/sn$ dir. Bu kürenin alanındaki değişim hızı nedir?

$$r = 6\ cm \quad , \quad \frac{dV}{dt} = 9\,cm^3/sn \qquad \frac{dA}{dt} = ?$$

$$V(t) = \frac{4}{3}\pi r^3(t) \quad \Rightarrow \frac{dV}{dt} = \frac{4}{\cancel{3}}\pi . \cancel{3} r^2(t)\frac{dr}{dt} \quad , r = 6$$

$$9 = 4\pi . 36 . \frac{dr}{dt}$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{dt} = \frac{1}{16\pi}\ cm/sn$$

$$A = 4\pi r^2 \quad \frac{dA}{dt} = 4\pi . 2 . r(t)\frac{dr}{dt} = 8\pi . 6 . \frac{1}{16\pi} = 3\,cm^2/sn$$

Lineerleştirme ve Diferansiyeller

Türevlenebilir bir $y=f(x)$ fonksiyonunun $x=a$ noktasındaki teğet doğrusu, $(a,f(a))$ noktasından geçer, bu doğrunun denklemi

$$y = f(a) + f'(a)(x-a)$$

şeklindedir. Bu doğruyu

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

şeklinde gösterelim.

Tanım: $y=f(x)$, bir a noktasında türevlenebilen bir fonksiyon ise

$$L(x) = f(a) + f'(a)(x-a)$$

fonksiyonuna f fonksiyonunun a noktasındaki lineerleştirmesi denir. $x \to a$ için $f(x) \approx L(x)$ yaklaşımındaki f ye a noktasındaki standart lineer yaklaşım denir. $x=a$ noktasına da bu yaklaşımın merkezi denir.

Örnek: $f(x)=\sqrt{1+x}$ fonksiyonunun $a=0$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz

$$f'(x)=\frac{1}{2}(1+x)^{-1/2}, \quad f(0)=1 \quad f'(0)=\frac{1}{2}$$

$$L(x)=f(0)+f'(0)(x-0)$$

$$L(x)=1+\frac{1}{2}(x-0)=1+\frac{x}{2}$$

Örnek: $f(x)=\sqrt{x+1}$ fonksiyonunun $a=3$ noktasındaki lineerleştirmesini bulunuz. Standart lineer yaklaşımı kullanarak $\sqrt{3,95}$ ve $\sqrt{4,01}$ in yaklaşık değerini bulunuz

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x+1}}, \quad f'(3)=\frac{1}{4}, \quad f(3)=2$$

ise f fonksiyonunun $a=3$ noktasındaki lineerleştirmesi

$$L(x)=f(3)+f'(3)(x-3)$$
$$L(x)=2+\frac{1}{4}(x-3)$$

$x\to 3$ için $f(x)\approx L(x)$ yada $\sqrt{x+1}\approx 2+\frac{1}{4}(x-3)$

$x=2{,}95$, $f(2{,}95)=\sqrt{3{,}95}\approx L(2{,}95)=2+\frac{1}{4}(2{,}95-3)=1{,}9875$

$x=3{,}01$, $f(3{,}01)=\sqrt{4{,}01}\approx L(3{,}01)=2+\frac{1}{4}(3{,}01-3)=2{,}0025$

NOT: Kök ve kuvvetler için önemli bir lineer yaklaşım, x, 0'a yakın ve k herhangi bir reel sayı olmak üzere

$$(1+x)^k \approx 1+kx$$

şeklindedir.

Örnek: $\sqrt{1+x} = (1+x)^{1/2} \approx 1+\frac{1}{2}x \quad , \; k=\frac{1}{2}$

$$\frac{1}{1-x} = (1-x)^{-1} \approx 1+(-1)(-x) = 1+x \quad , \; k=-1$$

ve

x yerine $-x$

$$\sqrt[3]{1+5x^4} = (1+5x^4)^{1/3} = 1+\frac{1}{3}5x^4 \quad , \; k=\frac{1}{3} \quad x \to 5x^4$$

Tanım (Diferansiyel): x bağımsız değişkenin diferansiyeli sıfırdan farklı Δx değerine eşittir ve dx ile gösterilir. Yani $\Delta x = dx$ dir.

f, x noktasında diferansiyellenebilir ise, y bağımlı değişkeninin diferansiyeli dy ile gösterilir ve

$$dy = f'(x)\Delta x = f'(x)dx$$

olur.

Örnek: $f(x) = 5x^2+4x+1$ fonksiyonu için Δy ve dy değerlerini bulunuz.

$x=6$, $\Delta x = dx = 0{,}02$ için Δy ve dy değerlerini karşılaştırınız.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x) = \left(5(x+\Delta x)^2 + 4(x+\Delta x) + 1\right) - (5x^2 + 4x + 1)$$

$$\Rightarrow \Delta y = 10x\,\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2 = (10x+4)\Delta x + 5(\Delta x)^2$$

$f'(x) = 10x + 4$ ve $dy = f'(x)dx$ kullanılırsa

$$dy = (10x+4)dx \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow \Delta y = (10x+4)\Delta x + 5(\Delta x)^2 = dy + 5(\Delta x)^2$$

$$\Delta y = dy + 5(\Delta x)^2$$

olur.

$X=6$, $\Delta x = 0{,}02$ için

$$\Delta y = 10x\Delta x + 4\Delta x + 5(\Delta x)^2$$
$$= 10 . 6 . (0{,}02) + 4 . (0{,}02) + 5(0{,}02)^2$$
$$= 1{,}282$$

$$dy = (10x+4)\Delta x = (10 . 6+4)(0{,}02) = 1{,}28$$

cevaptaki fark ise $5(\Delta x)^2 = 5(0{,}02)^2 = 0{,}002$ dir.

Bu örnekte $\Delta y = 1{,}282$ değeri $x=6$ dan $x=6{,}02$ ye yaklaşırken, $f(x) = 5x^2+4x+1$ fonksiyonunda meydana gelen hatasız değişim miktarıdır. $dy = 1{,}28$ diferansiyeli ise fonksiyonda meydana gelen yaklaşık değişim miktarını temsil eder.

Şimdi lineer yaklaşıma geri dönelim.

Diferansiyel kavramı $f(x+\Delta x)$ yaklaşık değerinin bulunmasında da kullanılabilir.

$$\Delta y = f(x+\Delta x) - f(x)$$

$$\Rightarrow f(x+\Delta x) = f(x) + \Delta y$$

$\Delta x = dx$ için ve $\Delta y \approx dy$

$$f(x+dx) = f(x+\Delta x) \approx f(x) + dy$$

yazılabilir.

Dolayısıyla dx küçükse ve $f(x)$ biliniyorsa $f(x+dx)$ değerini tahmin etmek için

$\Delta y \approx dy$ yaklaşımı kullanılır.

$$dy = f'(x)\,dx = f'(x)\,\Delta x$$

olması kullanılırsa,

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$ dir.

$x=a$ ve $\Delta x = dx = x-a$ alınırsa

$f(x) \approx L(x)$ elde edilir.

$$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$$

elde edilir. Böylece f nin x deki değerini bulmak için $f(a)$ ve $f'(a)$ değerleri kullanılırsa $f(x)$ e yaklaşık bir değer bulunabilir.

Örnek: $(2,01)^3$ yaklaşık değerini bulunuz.

$f(x) = x^3$ fonksiyonu tanımlayalım.

$x=2$ ve $\Delta x = 0,01$ için

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3$ ifadesinin yaklaşık değerini hesaplayalım.

$f(x+\Delta x) \approx f(x) + f'(x)dx$

$f(x+\Delta x) = (x+\Delta x)^3 \approx x^3 + 3x^2 . \Delta x$

$x=2$, $\Delta x = 0{,}01$ değerleri yazılırsa

$(2{,}01)^3 \approx 2^3 + 3.2^2(0{,}01) = 8{,}12$ bulunur.

Örnek: $\sqrt[3]{25}$ in yaklaşık değeri

$f(x) \approx f(a) + f'(a)(x-a)$

$f(x) = \sqrt[3]{x}$ $x=25$, $a=27$ $f'(x) = \frac{1}{3}x^{-2/3}$ $f(a)=3$

$f(x) = \sqrt[3]{25} \cong 3 + \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{27^2}}(25-27) \cong \frac{79}{27}$

Örnek: sin 33 ün yaklaşık değeri?

$x = 33^\circ$ yani $x = 33 \cdot \frac{\pi}{180}$ radyan "$\frac{D}{180} = \frac{R}{\pi}$"

$a = 30 = \frac{\pi}{6}$ bilinen en yakın açı

$f(x) = \sin x \quad f'(x) = \cos x$

$$\sin 33 = f(33) = f\left(33 \cdot \frac{\pi}{180}\right) \cong f\left(\frac{\pi}{6}\right) + f'\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(\frac{33\pi}{180} - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$\cong \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\,\frac{\pi}{60} \cong 0{,}543$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik