



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim
Dersleri Matematik
101-103

Kapalı Fonksiyonların Türevi

Tanımla: $y=f(x)$ açık fonksiyon şeklinde yazılamayan fakat $\frac{dy}{dx}$ nin x 'in bir fonksiyonu olduğu $F(x,y)=0$ şeklindeki fonksiyonlara kapalı fonksiyon denir.

Bu tür fonksiyonların türevi alınırken y, x in bir fonksiyonu olduğu düşünülerek zincir kuralı ile eşitliğin her iki yanının x e göre türevi alınır.

II. yol: $F(x,y)=0$ için

F_x : sadece x değişkenine göre türev

F_y : " y " " "

$$y' = - \frac{F_x}{F_y} \text{ dir.}$$

Örnek: $x^3y - xy^2 + 2y^3 + 5x = 0$ $y' = \frac{dy}{dx} = ?$

$$x^3y - xy^2 + 2y^3 + 5x = 0, \quad y = f(x)$$

$$3x^2y + x^3y' - (y^2 + 2xyy') + 6y^2 \cdot y' + 5 = 0$$

$$y'(x^3 - 2xy + 6y^2) = y^2 - 3x^2y - 5$$

$$y' = \frac{y^2 - 3x^2y - 5}{x^3 - 2xy + 6y^2}$$

veya $F_x = 3x^2y - y^2 + 5$, $F_y = x^3 - 2xy + 6y^2$ olmak üzere

$$y' = - \frac{(3x^2y - y^2 + 5)}{x^3 - 2xy + 6y^2}$$

Örnek: $x \tan(xy) - 1 = 0$ $y \in [0, \frac{\pi}{2}]$ olmak üzere $y' = ?$

$$y' = -\frac{F_x}{F_y} = -\frac{\tan(xy) + x \cdot (1 + \tan^2(xy)) \cdot y}{x(1 + \tan^2(xy)) \cdot x}$$

Parametrik Fonksiyonların Türevi

Tanım: $y = f(x)$ şeklinde açık halde yazılmayan veya yazılmamış, herhangi bir ortak değişkene göre ifade edilen fonksiyonlara parametrik fonksiyonlar denir.

$t \in [a, b]$ iken $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ ile tanımlı fonksiyon bir parametrik gösterimdir.

Bu fonksiyonların 1. türevi

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ile bulunur.}$$

2. türevi

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{dy}{dx} \right) = \frac{dy'}{dx} = \frac{\frac{dy'}{dt}}{\frac{dx}{dt}}$$

Benzer şekilde 3. türevi

$$y''' = \frac{\frac{dy''}{dt}}{\frac{dx}{dt}} \quad \text{ile bulunur.}$$

Örnek: $\begin{cases} x(t) = t^2 \cos t \\ y(t) = t \sin t \end{cases}$ $\frac{dy}{dx} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\sin t + t \cos t}{2t \cos t - t^2 \sin t} \Big|_{t=\frac{\pi}{6}} = \frac{\frac{1}{2} + \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2 \cdot \frac{\pi}{6} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\pi^2}{36} \cdot \frac{1}{2}}$$

Örnek: $\begin{cases} x(t) = 3 \cos t \\ y(t) = 4 \sin t \end{cases}$ $\frac{d^2y}{dx^2} \Big|_{t=\frac{\pi}{4}} = ?$

$$y' = \frac{dy}{dx} = \frac{\frac{dy}{dt}}{\frac{dx}{dt}} = \frac{4 \cos t}{-3 \sin t}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{\frac{d}{dt} y'}{\frac{dx}{dt}} = \frac{\frac{-4 \sin t (-3 \sin t) - 4 \cos t (-3 \cos t)}{9 \sin^2 t}}{-3 \sin t}$$

$$y'' = \frac{12\sin^2 t + 12\cos^2 t}{-27\sin^3 t} = \frac{12}{-27\sin^3 t} \Big|_{t=\frac{\sqrt{2}}{4}} = \frac{-4}{9\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^3} = \frac{-16}{9\sqrt{2}}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim
Dersleri Matematik
101-103