ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Hiberbolik Fonksiyonların Türevi

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Hiperbolik Fonksiyonların Türevi

$f(x) = \sinh x = \dfrac{e^{x} - e^{-x}}{2}$ olduğundan üstel fonksiyonun

türevi yardımıyla

$$f'(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2} = \cosh x$$ olur. O halde

$\Rightarrow (\sinh x)' = \cosh x$ dir. Benzer şekilde

$f(x) = \cosh x$	fonksiyonun	türevi	$f'(x) = \sinh x$
$f(x) = \tanh x$	"	"	$f'(x) = \operatorname{sech}^2 x$
$f(x) = \coth x$	"	"	$f'(x) = -\operatorname{cosech}^2 x$
$f(x) = \operatorname{sech} x$	"	"	$f'(x) = -\operatorname{sech} x \tanh x$
$f(x) = \operatorname{cosech} x$	"	"	$f'(x) = -\operatorname{cosech} x \coth x$

Örnek: $f(x)=\sinh(3x^2+5x+1) \Rightarrow f'(x)=?$

$$f'(x)=\cosh(3x^2+5x+1)\cdot(6x+5)$$

Ters Hiperbolik fonksiyonların Türevi

Ters hiperbolik fonksiyonların türevleri de ters fonksiyon türevi kuralı yardımıyla hesaplanabilir.

Örnek: $f(x)=\sinh x \quad f^{-1}(y)=\operatorname{arcsinh} y \Rightarrow (f^{-1})'(y)=?$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{\cosh x}=\frac{1}{\sqrt{1+\sinh^2 x}}=\frac{1}{\sqrt{1+y^2}}$$

bağımsız değişken x seçilirse

$$(\operatorname{arcsinh} x)'=\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$ dir.

Benzer şekilde diğer ters hiperbolik fonksiyonların türevi ;

$$(\operatorname{arccosh} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$$

$$(\operatorname{arctanh} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{arccoth} x)' = \frac{1}{1-x^2}$$

$$(\operatorname{arccosech} x)' = \frac{-1}{|x|\sqrt{1+x^2}}$$

$$(\operatorname{arcsech} x)' = \frac{-1}{x\sqrt{1+x^2}}$$

Yüksek Mertebeden Türevler

$f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in D$ için türevlenebilir ise bunun türevi olan $f': D \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur. Bu fonksiyona f fonksiyonunun 1. mertebeden türevi denir. Eğer $f': D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in D$ için türevlenebilir ise $(f')': D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu vardır ve tanımlıdır. Bu fonksiyona f nin 2. mertebeden türevi denir ve $(f')' = f''$ gösterimi kullanılır.

f nin sıfırıncı mertebeden türevi kendisi olup $f^0(x) = f(x)$ dir. n. mertebeden türev için $f^{(n)}(x) = D^n(f(x))$ sembolü kullanılır.

UYARI: Herhangi bir fonksiyonun n. mertebeden türevi olması için $(n-1)$. mertebeden türevi var olmalıdır.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x < 0 \\ 0 & , x = 0 \\ x^3 & , x > 0 \end{cases}$$

fonksiyonu için $f', f'', f''', \ldots$ fonksiyonlarını bulalım.

$x > 0$ için $f(x) = x^3$, $f'(x) = 3x^2$

$x < 0$ için $f(x) = x^2$, $f'(x) = 2x$

$x = 0$ için ~~t~~ türevi bulalım.

$$f'(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{x^3 - 0}{x} = 0$$

$$f'(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{x^2 - 0}{x} = 0$$

$\Rightarrow f'(0) = 0$ dır.

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2, & x > 0 \\ 0, & x = 0 \\ 2x, & x < 0 \end{cases}$$

$f': \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bulunur.

$f''(0)$ için yine sağ ve sol türevlerine bakalım.

$$f''(0^+) = \lim_{x \to 0^+} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^+} \frac{3x^2 - 0}{x - 0} = 0$$

$$f''(0^-) = \lim_{x \to 0^-} \frac{f'(x) - f'(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0^-} \frac{2x - 0}{x} = 2$$

$f''(0^+) \neq f''(0^-)$ olup $f''(0)$ yoktur.

O halde f fonksiyonu $x=0$ da 1. mertebeden türevlenebilirdir.

NOT: f ve g fonksiyonları r. mertebeden türevlenebilir iki fonksiyon olsunlar.

$m+n \leq r$ olm. üz. $D^m(D^n(f(x))) = D^{m+n}(f(x))$

$\lambda \in \mathbb{R}$, $n \leq r$ olmak üz. $D^n(\lambda f(x)) = \lambda D^n(f(x))$

$n \leq r$ olmak üz. $D^n((f+g)(x)) = D^n(f(x)) \mp D^n(g(x))$

Örnek: $f(x) = \cos 2x$, $f^{(n)}(x) = ?$

$f(x) = \cos 2x$

$f'(x) = -\sin 2x \cdot 2$

$f''(x) = -\cos 2x \cdot 2 \cdot 2$

$f'''(x) = \sin 2x \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2$

$f^{(IV)}(x) = \cos 2x \cdot 2^4$

$\vdots$

$f^{(n)}(x) = \cos\left(2x + \frac{\pi}{2} n\right) 2^n$

<u>Örnek:</u> $f(x) = \frac{1}{x}$ $\qquad f^{(n)}(1) = ?$

$$f(x) = x^{-1}$$
$$f'(x) = -x^{-2}$$
$$f''(x) = 2x^{-3}$$
$$f'''(x) = -2.3.x^{-4}$$
$$f^{(IV)}(x) = 2.3.4.x^{-5}$$
$$\vdots$$
$$f^{(n)}(x) = (-1)^n n!\, x^{-(n+1)}$$

$$f^{(n)}(1) = (-1)^n n!$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103