ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Zincir Kuralı

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Zincir kuralı

Teorem: $f: A \to B$, $g: B \to C$ iki fonksiyon, f $a \in A$ noktasında türevlenebilir, g ise $f(a)$ noktasında türevlenebilir olsun. $g \circ f: A \to C$, a noktasında türevlenebilirdir ve

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a)) \cdot f'(a)$$

dir.

Örnek: $y = \ln(\cos 3x) \Rightarrow y' = ?$

$$y' = \frac{1}{\cos 3x} \cdot (-3 \sin 3x) = -3 \tan 3x$$

Örnek: $y=\log_2(x^2-3x+1) \Rightarrow y'=?$

Çözüm:

$$y'=\frac{2x-3}{x^2-3x+1}\cdot\log_2 e$$

Örnek: $f(x)=\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^4 \Rightarrow f'(x)=?$

Çözüm:

$$f'(x)=4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)'$$

$$=4\left(\frac{2x+4}{1-x^2}\right)^3\cdot\left(\frac{2(1-x^2)+2x(2x+4)}{(1-x^2)^2}\right)$$

Örnek: $f(x) = \sin\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \Rightarrow f'(x)$

Çözüm:

$$f'(x) = \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)'}{\frac{2x}{x^2+1}}$$

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{2(x^2+1)-2x(2x)}{(x^2+1)^2} \cdot \frac{x^2+1}{2x}$$

$$= \cos\left(\ln\left(\frac{2x}{x^2+1}\right)\right) \cdot \frac{1-x^2}{x(x^2+1)}$$

Örnek: $f(x) = \sec^2\left(\ln \frac{\cos x}{2^x+1}\right) \Rightarrow f'(x)$

Çözüm:

$$f'(x) = 2\sec\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right)\cdot \sec\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right)\cdot \tan\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right)\cdot \frac{\left(\frac{\cos x}{2^x+1}\right)'}{\frac{\cos x}{2^x+1}}$$

$$= 2\sec\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right)\sec\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right)\tan\left(\ln\frac{\cos x}{2^x+1}\right) \cdot \frac{-\sin x\,(2^x+1) - \cos x . 2^x . \ln 2}{(2^x+1)^2}\cdot\frac{2^x+1}{\cos x}$$

Örnek: $f(x) = \sqrt[3]{\sin^7\left(\tan \dfrac{\ln x - \sqrt[3]{x}}{x}\right)} \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm:

$$f(x) = \left(\sin\left(\tan \frac{\ln x - x^{1/3}}{x}\right)\right)^{7/3}$$

$$f'(x) = \frac{7}{3}\left(\sin\left(\tan \frac{\ln x - x^{1/3}}{x}\right)\right)^{4/3} \cdot \cos\left(\tan \frac{\ln x - x^{1/3}}{x}\right)$$

$$\cdot \sec^2\left(\frac{\ln x - x^{1/3}}{x}\right) \cdot \frac{\left(\frac{1}{x} - \frac{1}{3}x^{-2/3}\right) \cdot x - \left(\ln x - x^{1/3}\right)}{x^2}$$

Teorem: $A, B \subset \mathbb{R}$, $f : A \to B$ fonksiyonu birebir ve örten bir fonksiyon olsun. Eğer fonksiyon $x_0 \in A$ noktasında türevlenebilir ve $f'(x_0) \neq 0$ ise f^{-1} ters fonksiyonu da $f(x_0) = y_0$ noktasında türevlenebilirdir ve

$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

dır.

UYARI: Bu teoremden bir fonksiyonun tersinin bir noktadaki türevini hesaplamak için fonksiyonun tersini bulmaya gerek yoktur. Bu teorem genellikle fonksiyonların terslerini bulmanın zor olduğu hallerde fonksiyonların terslerinin türevlerini hesaplamada kullanılır.

Örnek: $f(x) = x^3 + x \qquad (f^{-1})'(2) = ?$

Çözüm:

$$f(x_0) = 2 \quad \Rightarrow \quad f(x_0) = x_0^3 + x_0 = 2$$

$$x_0^3 + x_0 - 2 = 0$$

$$x_0 = 1$$

$$f'(x) = 3x^2 + 1 \qquad f'(1) = 4$$

$$(f^{-1})'(2) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{4}$$

Örnek: $f(x) = \frac{x}{x+1}$ olmak üzere f^{-1} fonksiyonun

$y_0 = \frac{1}{2}$ noktasındaki türevi?

Çözüm: $(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)}$

$f(x_0) = y_0 = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{x_0}{x_0+1} = \frac{1}{2}$ $\quad 2x_0 = x_0 + 1$

$x_0 = 1$

$f'(x) = \frac{x+1-x}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)^2}$

$(f^{-1})'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{f'(1)} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$

Bu teorem yardımıyla ters trigonometrik fonksiyonların türevlerini araştıralım;

Ters trigonometrik fonksiyonların türevleri

Trigonometrik fonksiyonları kotanjant ve kosinüsü $[0, \pi]$, sinüs ve tanjant fonksiyonlarını $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlarsa birebir olurlar. Aynı zamanda örten olduklarından bu fonksiyonların terslerinden bahsedilebilir.

Örnek: $f(x) = \sin x$ $\quad f^{-1}(y) = \arcsin y$ olup $(f^{-1})'(y) = ?$

Çözüm:

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\cos x} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 x}} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\Rightarrow (f^{-1})'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \quad , \quad |x| < 1$$

Burada dikkat etmemiz gereken bir husus vardır

$$\cos^2 x+\sin^2 x = 1 \Rightarrow \cos x = \mp\sqrt{1-\sin^2 x}$$

$\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ aralığında $\cos x = \sqrt{1-\sin^2 x}$ alınır.

Örnek: $f(x) = \cos x \qquad f^{-1}(y) = \arccos y \Rightarrow (f^{-1})'(y) = ?$

Çözüm:

$-1 \leq x \leq 1$ olmak üzere $\arcsin x + \arccos x = \frac{\pi}{2}$ dir. Gerçekten

$$\left.\begin{aligned} \arcsin x = \alpha &\Rightarrow \sin\alpha = x \\ \arccos x = \beta &\Rightarrow \cos\beta = x \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &\sin\alpha = \cos\beta \\ &\alpha = \beta = \frac{\pi}{4} \\ &\alpha+\beta = \frac{\pi}{2} \text{ dir.} \end{aligned}$$

$$(\arcsin x + \arccos x)' = \left(\frac{\pi}{2}\right)'$$

$$(\arcsin x)' + (\arccos x)' = 0 \Rightarrow (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \text{ dir.}$$

Örnek: $f(x)=\tan x \quad f^{-1}(y)=\arctan y \Rightarrow (f^{-1})'(y)=?$

$$(f^{-1})'(y)=\frac{1}{f'(x)}=\frac{1}{1+\tan^2 x}=\frac{1}{1+y^2}$$

$$\Rightarrow (\arctan x)'=\frac{1}{1+x^2} \text{ dir.}$$

Benzer düşünce ile

$$(\operatorname{arccot} x)'=-\frac{1}{1+x^2}$$

dir.

Benzer düşünce ile

$f(x) = \operatorname{arcsec} x$ fonksiyonun türevi $f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

$f(x) = \operatorname{arccosec} x$ " " $f'(x) = \dfrac{-1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$, $|x|>1$

Örnek! $f(x) = \arcsin(2x^3+5x^2-1) \Rightarrow f'(x) = ?$

Çözüm!

Bileşke fonksiyonun türevinden yararlanacağız,

$2x^3+5x^2-1 = u$ dersek $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$

$\Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-(2x^3+5x^2-1)^2}} \cdot (6x^2+10x)$

Örnek: $f(x) = \log_a x$ fonksiyonunun $(0,\infty)$ üzerinde türevlenebilir ve türevinin

$$f'(x) = \frac{1}{x}\log_a e$$

olduğunu biliyoruz. Dolayısıyla bu fonksiyonun tersi olan $f^{-1}(y) = a^y$ üstel fonksiyonun türevini bulabiliriz.

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{\frac{1}{x}\log_a e} = \frac{1}{\frac{1}{a^y}\log_a e} = a^y.\log_e a = a^y.\ln a$$

olarak teorem yardımıyla bulunabilir.

$$\Rightarrow f(x) = a^x \quad \Rightarrow f'(x) = a^x.\ln a \text{ dır.}$$

Teorem: Bir f fonksiyonu a noktasında türevlenebilir ise f fonksiyonu a noktasında süreklidir. Bu teoremin tersi herzaman doğru olmayabilir. Yani sürekli olunan noktada türevi olmayabilir.

Bir fonksiyon a noktasında süreksiz ise o noktada türevsizdir.

Örnek:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 & , x \leq 1 \\ -x+2 & , x > 1 \end{cases}$$

fonksiyonunu ele alalım.

$\lim_{x \to 1^+} (-x+2) = 1 \qquad \lim_{x \to 1^-} x^2 = 1 \quad , \; g(1) = 1$

olup $x=1$ de fonksiyon süreklidir.

$$f'(x) = \begin{cases} 2x & , \; x \le 1 \\ -1 & , \; x > 1 \end{cases}$$

$f'(1^+) = -1 \neq f'(1^-) = 2$ olup türevli değildir.

Logaritmik türev alma

$y = f(x)^{g(x)}$ şeklindeki fonksiyonların türevini alırken logaritmadan faydalanılır.

y' bulmak için her iki tarafın e tabanında logaritması alınır.

$$\ln y = \ln f(x)^{g(x)}$$

$$\ln y = g(x) \ln f(x)$$

$$\frac{y'}{y} = g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)}$$

$$y' = y\left(g'(x) \ln f(x) + g(x) \frac{f'(x)}{f(x)} \right)$$

ile bulunur.

Örnek: $y = x^{\ln x} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \ln(x^{\ln x})$

$\ln y = \ln x \cdot \ln x \Rightarrow \dfrac{y'}{y} = \dfrac{1}{x}\ln x + \ln x \cdot \dfrac{1}{x}$

$y' = y\left(\dfrac{2}{x}\ln x\right) \Rightarrow y' = x^{\ln x}\left(\dfrac{2}{x}\ln x\right)$

dır.

Örnek: $y = \sin x^{\cos x} \Rightarrow y' = ?$

$\ln y = \cos x \ln(\sin x)$

$\dfrac{y'}{y} = -\sin x \ln(\sin x) + \dfrac{\cos^2 x}{\sin x}$

$\rightarrow y' = \cos x \ln(\sin x) \cdot \left(\dfrac{\cos^2 x}{\sin x} - \sin x \ln(\sin x)\right)$

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103