ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Türev

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

TÜREV

Tanım; $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f: A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $x_0 \in A$ sayısı verilsin.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$ limiti veya buna denk olan

ve bu ifadede $x = x_0 + h$ alınması ile elde edilen

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$

limiti varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında türevlenebilirdir denir, ve bu limit değerine de f nin x_0 noktasındaki türevi adı verilir ve

$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h}$$ ile gösterilir.

Yukarıdaki tanımdan yararlanarak $\forall x \in D_f$ noktasındaki türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

ile ifade edilebilir. Ayrıca $y = f(x)$ fonksiyonunun türevi

$$y', \; f'(x), \; \frac{dy}{dx}, \; \frac{df(x)}{dx}, \; D(f(x)), \; y_x, \; f_x$$ sembollerinden biriyle gösterilir.

Türev tanımını kullanarak verilen bir fonksiyonun türevini hesaplayalım:

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = c$ sabit fonksiyonunun türevi

Çözüm:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{c - c}{h} = 0$$

Örnek: $f(x) = x$ fonks. türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{x + h - x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h}{h} = 1$$

Örnek: $n \in \mathbb{N}$, $f(x) = x^n$ fonksiyonun türevi

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(x+h)^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{x^n + \binom{n}{1} x^{n-1} h + \binom{n}{2} x^{n-2} h^2 + \dots + \binom{n}{n} h^n - x^n}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h \left\{ \binom{n}{1} x^{n-1} + \binom{n}{2} x^{n-2} h + \dots + \binom{n}{n} h^{n-1} \right\}}{h}$$

$$= \binom{n}{1} x^{n-1} = n x^{n-1}$$

$$\Rightarrow f'(x) = n x^{n-1}$$

Örnek: $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=\sqrt{x}$ $a\in[0,\infty)$ daki türevi

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sqrt{x}-\sqrt{a}}{(\sqrt{x}-\sqrt{a})(\sqrt{x}+\sqrt{a})}=\lim_{x\to a}\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{a}}=\frac{1}{2\sqrt{a}}$$

O halde $x\in[0,\infty)$ daki türevi

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$ dir.

Örnek: $f(x)=\sin x$ fonksiyonunun türevi

$$f'(a)=\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\lim_{x\to a}\frac{\sin x-\sin a}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{\frac{x-a}{2}}$$

$$=\lim_{x\to a}\frac{\sin\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}\cdot\lim_{x\to a}\cos\frac{x+a}{2}=1\cdot\cos a=\cos a$$

$\Rightarrow f'(x)=\cos x$ elde edilir.

Benzer şekilde türev tanımı yardımıyla bazı elemanter fonksiyonların türevleri aşağıda verilmiştir.

$$f(x)=\cos x \Rightarrow f'(x)=-\sin x$$

$$f(x)=\tan x \Rightarrow f'(x)=1+\tan^2 x=\sec^2 x$$

$$f(x)=\cot x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec}^2 x$$

$$f(x)=\sec x \Rightarrow f'(x)=\sec x \tan x$$

$$f(x)=\operatorname{cosec} x \Rightarrow f'(x)=-\operatorname{cosec} x \cot x$$

$$f(x)=\log_a x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}\log_a e$$

$$f(x)=a^x \Rightarrow f'(x)=a^x . \ln a \quad , (a>0 \, , a\neq 1)$$

$$f(x)=\ln x \Rightarrow f'(x)=\frac{1}{x}$$

Örnek: $f(x)=x^2-x-6$ fonksiyonunun $x_0=2$ deki türevini hesaplayınız.

ÇÖZÜM:

$$f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

$$f'(2)=\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-6-(-4)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}\frac{x^2-x-2}{x-2}=\lim_{x\to 2}\frac{(x+1)(x-2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to 2}x+1=3$$

bulunur.

Örnek! $f(x)=|x|$ fonksiyonunun $x=0$ noktasındaki türevini hesaplayınız.

Çözüm:

$$f'(0)=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0^+}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x}{x}=1$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{|x|}{x}=\lim_{x\to 0^-}-\frac{x}{x}=-1$$

olup $\lim_{x\to 0}\frac{|x|}{x}$ limiti yoktur. Dolayısıyla fonksiyonun $x=0$ noktasında türevi yoktur.

Bu örnekten sağdan ve soldan limit kavramlarına paralel olarak sağdan ve soldan türev kavramlarını tanımlayabiliriz.

Tanım: Bir a noktasında veya a nın sağ komşuluğunda tanımlanan f fonksiyonu için f nin a noktasındaki sağdan türevi

$$f'(a^+) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

ile tanımlıdır.

Yine bir b noktasında veya b nin sol komşuluğunda tanımlı bir f fonksiyonunun b noktasındaki soldan türevi

$$f'(b^-) = \lim_{x \to b^-} \frac{f(x) - f(b)}{x - b}$$

İle tanımlıdır.

UYARI : Bir f fonksiyonunun bir a noktasında türevinin olması için $\Leftrightarrow$

$$f'(a) = f'(a^+) = f'(a^-)$$

olmalıdır.

NOT! f fonksiyonu $[a,b]$ de tanımlı bir fonksiyon ise a ve b noktalarındaki türevleri, sırasıyla, f fonksiyonunun a ve b noktalarındaki sağdan ve soldan türevleri olarak tanımlıdır.

Örnek!

$$f(x)=\begin{cases} x^2+1 & , \ x\leq 2 \\ 2x+1 & , \ x>2 \end{cases} \Rightarrow f'(2) \text{ yi bulunuz.}$$

$$f'(2^+)=\lim_{x\to 2^+}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2x+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^+}\frac{2(x-2)}{x-2}=2$$

$$f'(2^-)=\lim_{x\to 2^-}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\frac{x^2+1-5}{x-2}=\lim_{x\to 2^-} x+2=4$$

$f'(2^+)\neq f'(2^-)$ olup $x=2$ noktasında türevi yoktur. fonksiyon $\mathbb{R}-\{2\}$ de türevlidir.

Tanım: $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall x \in A$ için türevlenebilir ise f ye A üzerinde türevlenebilirdir denir. Ayrıca $f': A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyondur.

Teorem: $f: A \to \mathbb{R}$, $g: A \to \mathbb{R}$ iki türevlenebilir fonksiyon olsunlar. $\lambda \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f+g$, $f-g$, λf, $f \cdot g$ ve $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonları da türevlenebilirdir

ve bu türevler aşağıdaki gibidir.

$$(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$$
$$(\lambda f)'(x) = \lambda f'(x)$$
$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) g(x) + f(x) g'(x)$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)}, \quad g(x) \neq 0$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Fatma GÜLER

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103