ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi
# Fen Edebiyat Fakültesi
# Matematik Bölümü
# Dijital Ders Platformu

## Süreklilik

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Süreklilik

Tanım: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $x_0 \in A$ olsun. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ oluyorsa $f$ fonksiyonuna $x_0$ noktasında süreklidir denir.

O halde $f$ in $x_0$ da sürekli olması için

1) $f$, $x_0$ da tanımlıdır,

2) $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ vardır,

3) $f(x_0)$ ile $\lim\limits_{x \to x_0} f(x)$ eşittir

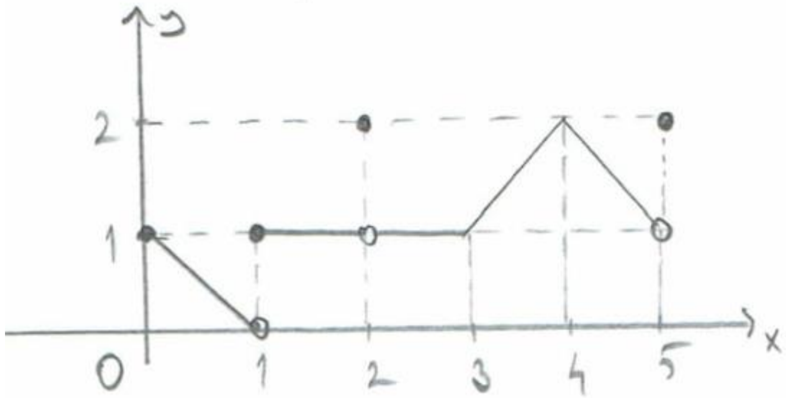
şartlarının sağlanması gerekir.

Eğer $f$ fonksiyonu tanım kümesindeki her noktada sürekli ise $f$ e sürekli fonksiyon denir.

Uyarı: $D_f = [a,b]$ ise $x=a$ ve $x=b$ de süreklilik için a da sağ, b de sol limitlere bakılır.

$f$, $x_0$ da süreklidir $\Leftrightarrow$ Her $\varepsilon > 0$ için $|x - x_0| < \delta$ olduğunda $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde $\delta > 0$ sayısı vardır.

Örnek: $f: [0,5] \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun grafiği aşağıda verilmiştir.




$\lim_{x \to 0^+} f(x) = f(0) = 1 \Rightarrow f$, $x = 0$ da sürekli

$x_0 \in (0,1)$ için $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$x = 1$ de sağ ve sol limitler farklı olup limit yoktur $\Rightarrow$ $x = 1$ de sürekli değil

$x_0 \in (1,2)$ için $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$x = 2$ için $\lim_{x \to 2} f(x) = 1 \neq 2 = f(2) \Rightarrow$ sürekli değil.

$x_0 \in (2,5)$ için $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \Rightarrow$ sürekli

$\lim_{x \to 5^-} f(x) = 1 \neq 2 = f(5) \Rightarrow$ sürekli değil.

Tanımı: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $a, b \in A$ olsun.

$\lim_{x \to a^+} f(x) = f(a) \Rightarrow f$ fonksiyonuna $a$ noktasında sağdan sürekli,

$\lim_{x \to b^-} f(x) = f(b) \Rightarrow f$ fonksiyonuna $b$ noktasında soldan sürekli denir.

Uyarı: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. $f$ in bir $c \in A$ noktasında sürekli olması için

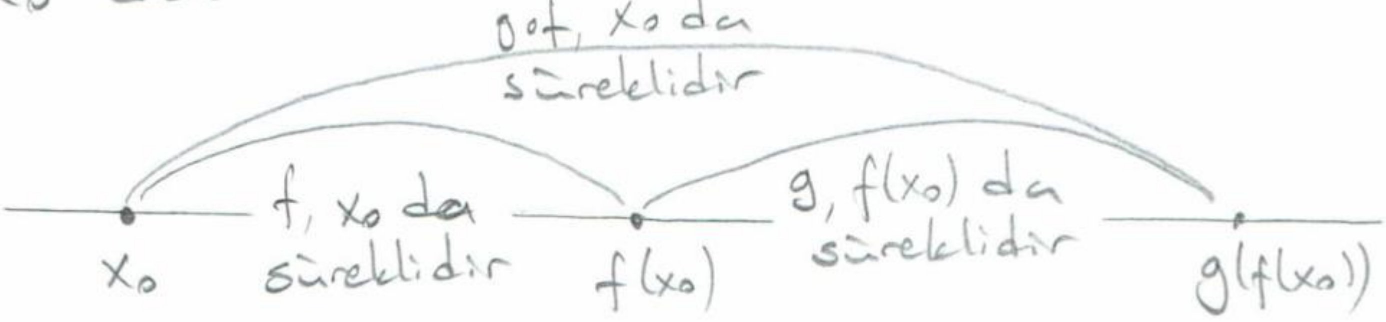
$c$ iç nokta ise ($A = [a,b]$ ve $c \in (a,b)$ gibi) $f$ in $c$ de hem sağdan hem soldan sürekli

$c$ uç nokta ise ($A = [a,b]$ ve $c = a$ veya $c = b$ gibi) $f$ in $c$ de sağdan veya soldan sürekli olması gerekir.

Uyarı: $f$ bir polinom ise her $c \in \mathbb{R}$ için $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ olduğundan $f$ $c$ de süreklidir. $c \in \mathbb{R}$ keyfi olup $f$, $\mathbb{R}$ de süreklidir.

Teorem: 1) $f$ ve $g$ fonksiyonları $x_0$ noktasında sürekli ise $f \mp g$, $f \cdot g$, $cf$ (c sabit), $f^{r/s}$ fonksiyonları da $x_0$ da süreklidir. $g(x_0) \neq 0$ ise $\frac{f}{g}$ de $x_0$ da süreklidir.

2) $f$ $x_0$ da, $g$ ise $f(x_0)$ sürekli ise $g \circ f$ de $x_0$ da süreklidir.




Örnek: Rasyonel fonksiyonlar tanımlı olduğu her noktada süreklidir. Çünkü $P(x)$ ve $Q(x)$ birer polinom olmak üzere sürekli olacağından $\frac{P(x)}{Q(x)}$ tanımlı olduğu yani $Q(x) \neq 0$ olan her noktada süreklidir.

Örnek: Mutlak değer fonksiyonu süreklidir.

$f(x)=|x| \Rightarrow$ $x>0 \Rightarrow f(x)=x$ polinom olup sürekli

$x<0 \Rightarrow f(x)=-x$ " " "

$x=0 \Rightarrow \lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} |x| = 0 = f(0) \Rightarrow x=0$ da sürekli

Örnek: Trigonometrik fonksiyonlar tanımlı oldukları her noktada süreklidir.

Örnek: $y=\sqrt{x^2+2x+3}$ fonksiyonunun tanım aralığında sürekli olduğunu gösterelim:

$f(x)=\sqrt{x}=x^{1/2}$ fonksiyonu $g(x)=x$ polinomunun bir rasyonel kuvveti olup süreklidir.

$h(x)=x^2+2x+3$ bir polinom olup süreklidir.

$y=(f\circ h)(x)=\sqrt{x^2+2x+3}$ iki sürekli fonksiyonun bileşkesi olup süreklidir.

Örnek: $y = \left| \frac{x^2 \cos x}{x-1} \right|$ fonksiyonunun tanım kümesinde sürekli olduğunu gösterelim:

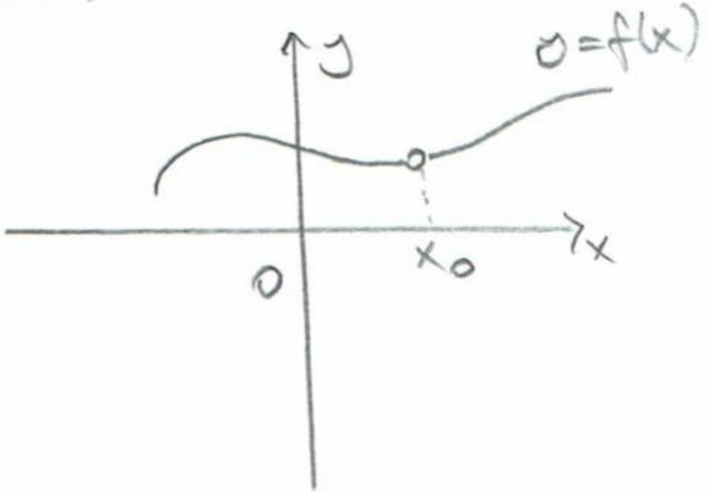
$\underbrace{x^2}_{\text{Polinom}} \underbrace{\cos x}_{\text{trigonometrik fonksiyon}}$ $\Rightarrow$ iki sürekli fonksiyonun çarpımı sürekli

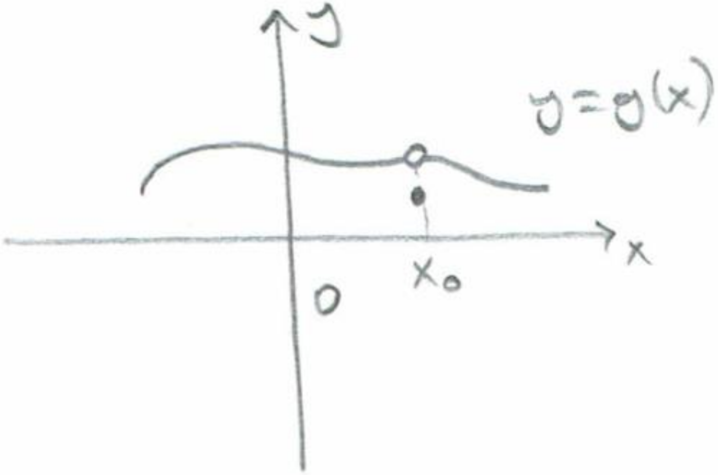
$x-1 \Rightarrow$ Polinom olup sürekli

$\frac{x^2 \cos x}{x-1} \Rightarrow$ iki sürekli fonksiyonun oranı olup sürekli

$y = \left| \frac{x^2 \cos x}{x-1} \right| \Rightarrow$ Mutlak değer fonksiyonu ile $\frac{x^2 \cos x}{x-1}$ fonksiyonunun bileşkesi olup süreklidir.

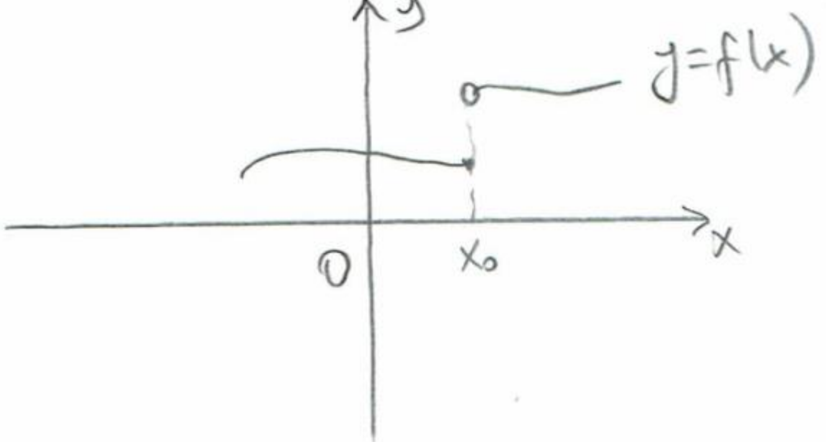
Tanım: $\lim_{x \to x_0} f(x) = L$ olsun. f fonksiyonu $x_0$ noktasında tanımsız veya $f(x_0) \neq L$ ise $x_0$ noktasında fonksiyon süreksizdir. Bu süreksizliğe kaldırılabilir süreksizlik denir.




Yukarıda grafikleri verilen f ve g fonksiyonları $x_0$ noktasında kaldırılabilir süreksizdir.

$\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x)$ ise fonksiyon $x_0$ noktasında kaldırılamaz süreksizdir.




f fonksiyonu $x_0$ noktasında kaldırılamaz süreksizdir.

Örnek: $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ fonksiyonu $x \neq 0$ olmak üzere her noktada süreklidir. Çünkü; $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = \frac{\sin x_0}{x_0} = f(x_0)$, $x_0 \neq 0$ dır. Diğer yandan $\lim\limits_{x \to 0} f(x) = 1$ olup fonksiyon 0. da tanımlı olmadığı için 0 noktası kaldırılabilir süreksizlik noktasıdır.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{\sin x}{x} & , x \neq 0 \\ 1 & , x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu ise her noktada süreklidir. Bu fonksiyonun $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ den tek farkı f in tanımlı olmadığı sıfır noktasında da tanımlı olmasıdır.

Örnek: $f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x^4-1} & , x<2 \\ x^2+3x-2 & , x\geq 2 \end{cases}$ fonksiyonu veriliyor. Fonksiyon

$x=\mp 1$ de tanımsız olduğu için süreksizdir.

$$\lim_{x\to 1^+} f(x)=\lim_{x\to 1^+}\frac{x^2-1}{x^4-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{\cancel{x^2-1}}{\cancel{(x^2-1)}(x^2+1)}=\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 1^-} f(x)=\lim_{x\to 1^-}\frac{1}{x^2+1}=\frac{1}{2}$$

$\lim_{x\to 1} f(x)=\frac{1}{2}$ olup fonksiyon $x=1$ de kaldırılabilir süreksiz.

Benzer şekilde $\lim_{x\to -1} f(x)=\frac{1}{2}$ olup $x=-1$ de de fonksiyon kaldırılabilir süreksizdir.

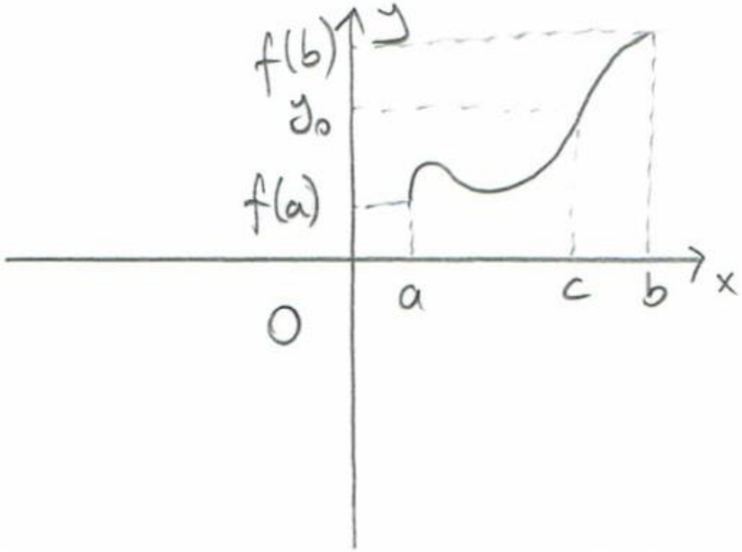
$x=2$ de fonksiyon parçalandığı için bu noktada süreksiz olabilir.

$$\lim_{x\to 2^+} f(x)=\lim_{x\to 2^+}(x^2+3x-2)=8$$

$$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-} \frac{x-1}{x^4-1} = \frac{1}{5} \Rightarrow \lim_{x\to 2^+} f(x) \neq \lim_{x\to 2^-} f(x)$$

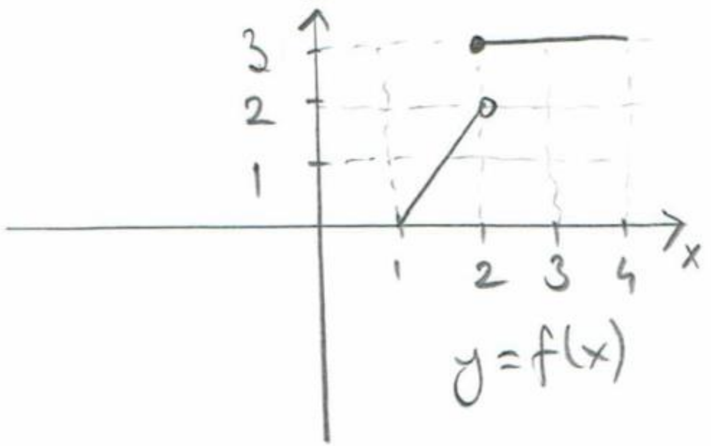
$\Rightarrow$ $x=2$ de kaldırılamaz süreksiz.

**Ara değer teoremi:** $[a,b]$ aralığı üzerinde tanımlı olan sürekli bir $f$ fonksiyonu $f(a)$ ile $f(b)$ arasındaki her değeri alır. Diğer bir ifadeyle $y_0$, $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir sayı ise en az bir $c \in [a,b]$ için $f(c) = y_0$ olur.




Geometrik olarak $y$ eksenini $f(a)$ ile $f(b)$ arasında bir $y_0$ sayısında kesen yatay bir doğru $y=f(x)$ eğrisini en az bir noktada keser.

Uyarı: Aradeğer teoreminde f fonksiyonunun sürekli olması gerekir. Aksi halde teorem geçersiz olur.




Yanda grafiği verilen f fonksiyonu süreksiz olduğu için $f(0)=1$ ile $f(4)=3$ arasındaki her değeri almaz.

Tanım: $f(x)=0$ denkleminin çözümüne f fonksiyonunun bir kökü veya sıfırı denir.

Aradeğer teoremine göre sürekli bir f fonksiyonunu işaret değiştirdiği her aralıkta en az bir köke sahiptir.

Örnek: $f(x) = x^3 - x - 1$ fonksiyonunun 1 ve 2 arasında bir kökünün olduğunu gösterelim:

$f$ bir polinom olup $\mathbb{R}$ de sürekli, dolayısıyla $[1,2]$ üzerinde süreklidir. O halde ara değer teoremi uygulanabilir.

$$f(1) = 1^3 - 1 - 1 = -1 < 0, \quad f(2) = 2^3 - 2 - 1 = 8 - 3 = 5 > 0$$

$\Rightarrow$ Ara değer teoremine göre $f$ fonksiyonu $-1$ ile $5$ arasındaki her değeri alacağı için $0$ değerini de alır. O halde $[1,2]$ aralığında $f$ in en az bir kökü vardır.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

# Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103