ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Belirsizlikler-Asimptotlar

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Belirsizlikler

$x \to x_0$ veya $x \to \mp\infty$ iken $\lim f(x)$ ve $\lim g(x)$ var ve $\lim g(x) \neq 0$ ise $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim f(x)}{\lim g(x)}$ olduğunu biliyoruz. Eğer $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ ise bu kuralı uygulayamayız. Bu durumda belirsizlik adı verilen biçim ile karşılaşırız. Bu belirsizlik $\left(\frac{0}{0}\right)$ ile gösterilir. Bunun dışında $\frac{\infty}{\infty}$, $0.\infty$, $\infty - \infty$ durumları da $\frac{0}{0}$ biçimine getirilebileceği için belirsizlik adını alır.

Örnek: $\lim\limits_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = ?$

$x \to 1$ iken $x^2+2x-3 \to 0$, $x-1 \to 0$ olduğundan $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliği vardır.

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2+2x-3}{x-1} = \lim_{x \to 1} \frac{(x+3)\cancel{(x-1)}}{\cancel{x-1}} = 4$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = ?$

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ belirsizliği: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\tan x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \left(\dfrac{\sin x}{\cos x} \dfrac{1}{x}\right) = \lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{\sin x}{x} \cdot \dfrac{1}{\cos x}\right)$

$$= \left(\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}\right) \lim_{x\to 0} \frac{1}{\cos x}\Big) = 1 \cdot \frac{1}{\cos 0} = 1$$

Örnek: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = ?$

$\left(\dfrac{0}{0}\right)$ belirsizliği: $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos 2x} = \lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin x - \cos x}{\cos^2 x - \sin^2 x}$

$$= \lim_{x\to \frac{\pi}{4}} \frac{\overset{-1}{\cancel{\sin x - \cos x}}}{(\cancel{\cos x - \sin x})(\cos x + \sin x)}$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4} + \sin\frac{\pi}{4}} = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Örnek: $\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-4}\right)=?$

$x\to\infty$ iken $\sqrt{x^2+x}$ ve $\sqrt{x^2-4}$ sonsuza gider ve $\infty-\infty$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlikten kurtulmak için fonksiyonu eşleniği ile çarpıp böleriz.

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-4}\right)=\lim_{x\to\infty}\left[\left(\sqrt{x^2+x}-\sqrt{x^2-4}\right)\frac{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}}\right]$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x^2}+x-\cancel{x^2}+4}{\sqrt{x^2+x}+\sqrt{x^2-4}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{x}\left(1+\overbrace{\frac{4}{x}}^{\to 0}\right)}{\cancel{x}\left(\sqrt{1+\underbrace{\frac{1}{x}}_{\to 0}}+\sqrt{1-\underbrace{\frac{4}{x}}_{\to 0}}\right)}=\frac{1}{2}.$$

Örnek: $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=?$

$(\infty.0)$ belirsizliği. $\lim_{x\to\infty}\left(x\sin\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{=}\lim_{t\to 0^+}\frac{\sin t}{t}=1.$

$\frac{1}{x}=t$ dersek

$x\to\infty$ iken $t\to 0^+$

Asimptotlar

Tanım: $\lim_{x\to\infty} f(x) = b$ veya $\lim_{x\to-\infty} f(x) = b$ oluyorsa $y=b$ doğrusuna $y=f(x)$ fonksiyonunun yatay asimptotudur denir.

Örnek: $\lim_{x\to\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ ve $\lim_{x\to-\infty} \frac{3x^2+1}{x^2+2} = 3$ olduğundan

$y=3$ doğrusu $y=\frac{3x^2+1}{x^2+2}$ fonksiyonunun yatay asimptotudur.

Uyarı: Eğri, yatay asimptotunu kesebilir.

Örnek: $y = 2 + \frac{\sin x}{x}$ eğrisinin yatay asimptotunu bulalım:

Her $x \in \mathbb{R}$ için $-1 \leq \sin x \leq 1$ dir.

$x \to \infty$ iken $-\frac{1}{x} \leq \frac{\sin x}{x} \leq \frac{1}{x}$ olur

$\lim\limits_{x\to\infty}\left(-\frac{1}{x}\right)=0$ ve $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{x}=0$ olduğundan sandviç teoremine göre $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=0$ olur.

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{\sin x}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}2+\lim_{x\to\infty}\frac{\sin x}{x}=2$$

$\Rightarrow$ $x\to\infty$ iken $y=2$ yatay asimptottur.

Benzer şekilde $x\to-\infty$ iken de $y=2$ nin yatay asimptot olduğu gösterilebilir.

Eğik asimptot

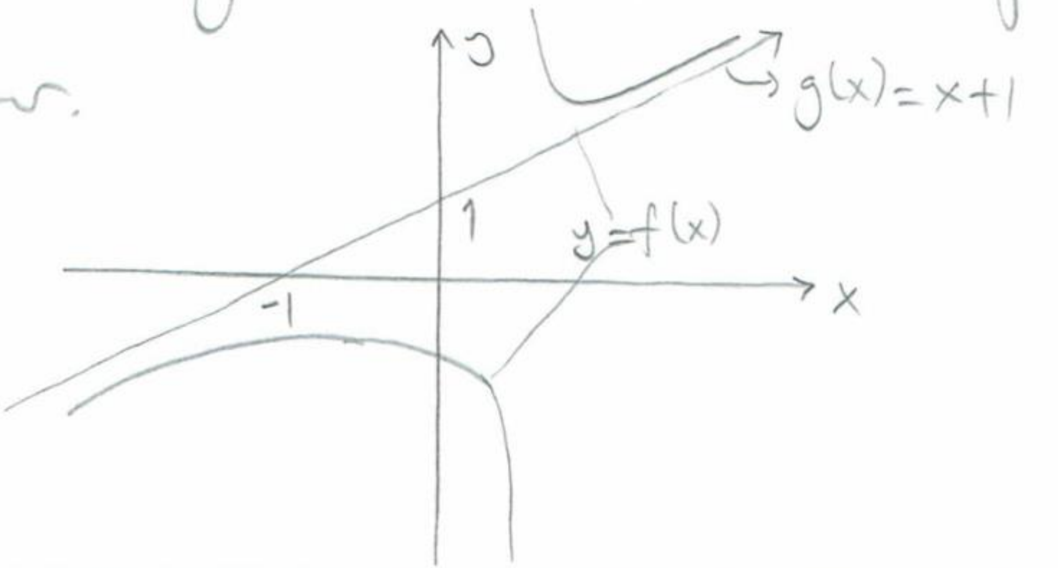
Rasyonel bir fonksiyonun payının derecesi paydasının derecesinden bir fazla ise fonksiyonun bir eğik asimptotu vardır. Fonksiyonu bir lineer fonksiyon ile $x\to\mp\infty$ iken limiti sıfıra giden bir kalanın toplamı olarak yazmak için pay paydaya bölünür.

Örnek: $f(x)=\dfrac{x^2+1}{x-1}$ fonksiyonunun eğik asimptotunu bulalım:

$$\begin{array}{r|l} x^2+1 & x-1 \\ \cline{2-2} -x^2-x & x+1 \\ \cline{1-1} x+1 & \\ -x-1 & \\ \cline{1-1} 2 & \end{array} \Rightarrow f(x)=x+1+\frac{2}{x-1}$$

$x \to \mp\infty$ iken $\dfrac{2}{x-1} \to 0$ olacağı için $f(x)$ fonksiyonu $g(x)=x+1$ doğrusuna yaklaşır.

$\Rightarrow$ $g(x)=x+1$ doğrusu $x \to \mp\infty$ iken $f(x)$ in eğik asimptotudur.

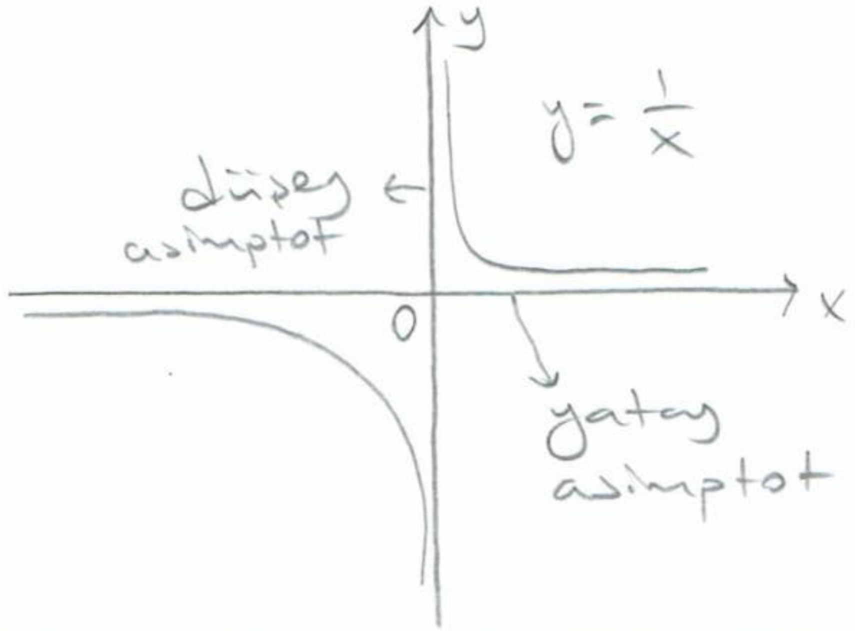


Tanım: $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \mp\infty$ veya $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \mp\infty$ oluyorsa $x = x_0$ doğrusuna $y = f(x)$ fonksiyonunun bir dikey (düşey) asimptotu denir.

Örnek: $f(x) = \frac{1}{x}$ fonksiyonunun düşey asimptotlarını bulalım.

$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = \infty \Rightarrow x = 0$ sağdan düşey asimptot

$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty \Rightarrow$ " soldan " "



Ayrıca $\lim_{x \to \mp\infty} \frac{1}{x} = 0$ olduğu için $y = 0$ $x \to \mp\infty$ iken yatay asimptot

Uyarı: Eğri düşey asimptotu kesmez.

Örnek: $f(x) = \ln \frac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun asimptotlarını bulalım.

Önce fonksiyonun tanım kümesini belirleyelim.

$$\frac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow D_f = (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$$

$\Rightarrow \mp 1$ de düşey asimptot olabilir.

$$\lim_{x\to 1^+} \ln \frac{\overset{\to 0^+}{(x-1)}}{\underset{\to 2}{(x+1)}} = -\infty \Rightarrow x=1 \text{ sağdan düşey asimptot.}$$

$$\lim_{x\to -1^-} \ln \frac{\overset{\to -2}{(x-1)}}{\underset{\to 0^-}{(x+1)}} = \infty \Rightarrow x=-1 \text{ soldan düşey asimptot.}$$

Yatay asimptotları inceleyelim:

$$\lim_{x\to\mp\infty} \ln \frac{x-1}{x+1} = \ln 1 = 0 \Rightarrow y=0 \text{ yatay asimptot.}$$

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103