UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

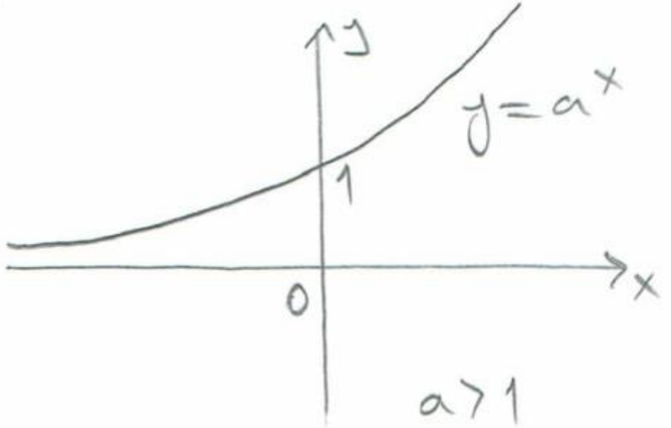
Üstel-Logaritmik Fonksiyonlar

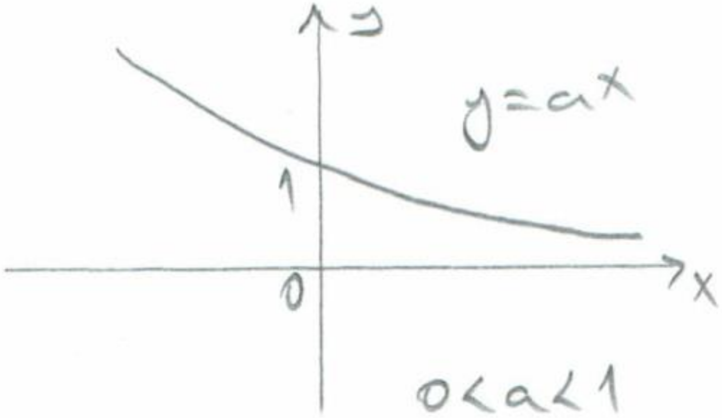
Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Üstel - Logaritma Fonksiyonları

Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ fonksiyonuna üstel fonksiyon, a sayısına ise üstel fonksiyonun tabanı denir.





Üstel fonksiyonun tanımı ve grafikleri göz önüne alınırsa şu özellikler ifade edilebilir:

1) Üstel fonksiyonun tanım kümesi $\mathbb{R}$ olduğu halde, $a^{g(x)}$ şeklindeki bir üstel fonksiyonun tanım kümesi bulunurken; $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ ve $g(x) \in \mathbb{R}$ durumları incelenmelidir.

Örnek: $f(x)=2^{\frac{1}{x^2-49}}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$$\frac{1}{x^2-49}\in\mathbb{R} \Rightarrow x^2-49\neq 0 \Rightarrow x\neq\mp 7 \Rightarrow D_f=\mathbb{R}-\{\mp 7\}.$$

2) Her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x)=a^x>0$ olur. O halde $-5\in\mathbb{R}$ için $a^x\neq -5$ olacağından $f(x)=a^x$ fonksiyonu örten değildir.

Uyarı: $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$, $f(x)=a^x$ şeklinde tanımlanırsa $f(x)=a^x$ örten olur.

3) $f(x_1)=f(x_2) \Rightarrow a^{x_1}=a^{x_2} \Rightarrow a^{x_1-x_2}=1 \Rightarrow x_1-x_2=0 \Rightarrow x_1=x_2$

$\Rightarrow f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=a^x$ birebirdir.

4) $f(x)=a^x$, $a>1$ için fonksiyonun grafiğine bakılırsa, x değerleri büyüdükçe fonksiyonun aldığı değerler de büyümektedir. O halde, $a>1$ için üstel fonksiyon artandır. Benzer şekilde $0<a<1$ için üstel fonksiyon azalandır.

Örnek: $2^{5x-1} > 2^{x+7}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$a = 2 > 1$ olduğu için üstel fonksiyon artandır.

$\Rightarrow 5x-1 > x+7 \Rightarrow 4x > 8 \Rightarrow x > 2 \Rightarrow ÇK = (2, \infty)$

Örnek: $\left(\frac{1}{2}\right)^{3x+1} > \left(\frac{1}{2}\right)^{x-5}$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım.

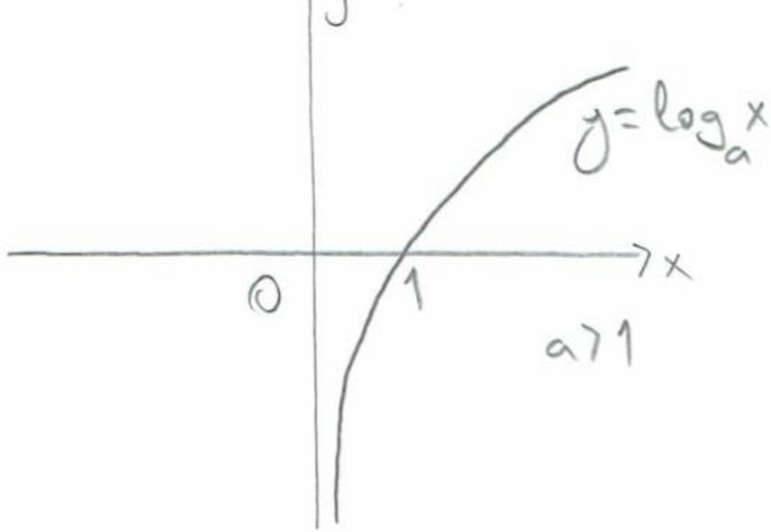
$a = \frac{1}{2} < 1$ olduğundan üstel fonksiyon azalandır.

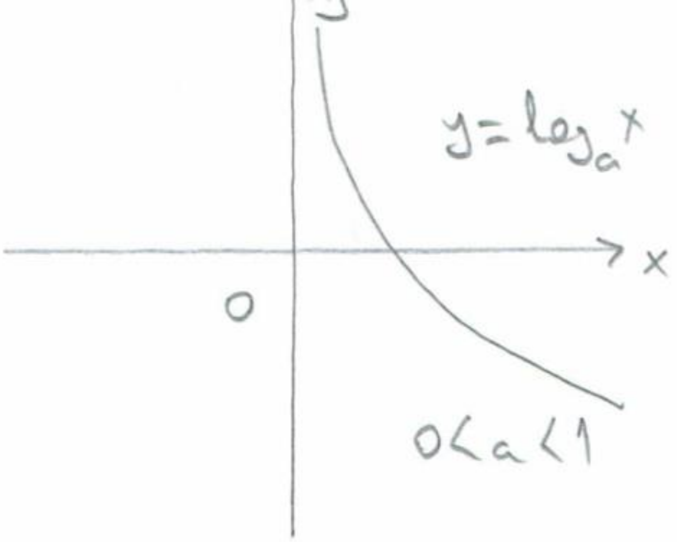
$\Rightarrow 3x+1 < x-5 \Rightarrow 2x < -6 \Rightarrow x < -3 \Rightarrow ÇK = (-\infty, -3)$

Tanım: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $f(x) = a^x$ şeklinde tanımlanan üstel fonksiyonun tersine logaritma fonksiyonu denir.

$\log_a : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $y = \log_a x$ şeklinde tanımlanır.

$\Rightarrow y = \log_a x \Leftrightarrow x = a^y$.





Logaritma fonksiyonunun özellikleri:

1) Logaritma fonksiyonunun tanım kümesi $\mathbb{R}^+$ dır. O halde $\log_a f(x)$ şeklinde bir fonksiyonun tanım kümesi incelenirken $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$, $f(x) > 0$ özellikleri incelenmelidir.

Örnek: $f(x) = \log_5 (x^2 - 3x + 2)$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$x^2 - 3x + 2 > 0 \Rightarrow (x-2)(x-1) > 0 \Rightarrow$

x		1		2	
$x-1$	$-$	0	$+$		$+$
$x-2$	$-$		$-$	0	$+$
x^2-3x+2	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow D_f = (-\infty, 1) \cup (2, \infty)$

2) $\log_a 1 = 0$

3) $\log_a a = 1$

4) $\log_a a^x = x$, $a^{\log_a x} = x$

5) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$

6) Her $x, y \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$

7) Her $x \in \mathbb{R}^+$, $r \in \mathbb{R}$ için $\log_a x^r = r \log_a x$.

8) Her $x \in \mathbb{R}^+$ için $\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$ (Taban değiştirme özelliği)

$\Rightarrow (\log_a b) \log_b a = 1$ ve $\log_a b = \frac{1}{\log_b a}$

9) Logaritmanın tabanı olarak e alınırsa logaritma fonksiyonuna doğal logaritma denir ve $\log_e x$ yerine $\ln x$ gösterimi kullanılır.

Taban değiştirme özelliği kullanılırsa

$$\log_a x = \frac{\log_e x}{\log_e a} = \frac{\ln x}{\ln a}$$

olur. Eğer taban 10 olarak alınırsa logaritma fonksiyonuna adi logaritma denir ve $\log_{10} x$ yerine $\log x$ gösterimi kullanılır.

$$\Rightarrow \log x = \frac{\ln x}{\ln 10}$$

10) $\log_a x$ in grafiğine bakılırsa $a>1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x<0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x>0$$

dır. Benzer şekilde $0<a<1$ için

$$0<x<1 \Rightarrow \log_a x>0$$

$$1<x \Rightarrow \log_a x<0$$

dır.

Örnek: $\log_2(x^2-3x+3)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$2>0 \Rightarrow \log_2(x^2-3x+3)>0$ olması için $x^2-3x+3>1$ olmalı

$\Rightarrow x^2-3x+2>0 \Rightarrow (x-2)(x-1)>0 \Rightarrow ÇK=(-\infty,1)\cup(2,\infty)$

Örnek: $\log_{1/3}(5x-1)>0$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulalım:

$0<\frac{1}{3}<1 \Rightarrow \log_{1/3}(5x-1)>0$ olması için $0<5x-1<1$ olmalı

$\Rightarrow 1<5x<2 \Rightarrow \frac{1}{5}<x<\frac{2}{5} \Rightarrow Ç.K=(\frac{1}{5},\frac{2}{5})$

11) $\log_a x$ in grafiğine bakarsak;

$a>1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ de büyüyor

$\Rightarrow \log_a x$ artandır.

$0<a<1 \Rightarrow x$ ler büyüdükçe $\log_a x$ küçülüyor

$\Rightarrow \log_a x$ azalandır.

Örnek: $a=\ln 2$, $b=\ln 3$, $c=\ln 5$ ise $\ln 1080$ in a, b, c cinsinden değerini bulalım.

$$\ln 1080 = \ln\left(2^3 3^3 5\right) = \ln 2^3 + \ln 3^3 + \ln 5 = 3\ln 2 + 3\ln 3 + \ln 5$$
$$= 3a + 3b + c$$

Örnek: $f(x) = \ln \dfrac{x-1}{x+1}$ fonksiyonunun tanım kümesini bulalım:

$\dfrac{x-1}{x+1} > 0 \Rightarrow$

x		-1		1	
$x-1$	$-$		$-$	0	$+$
$x+1$	$-$	0	$+$		$+$
$\frac{x-1}{x+1}$	$+$		$-$		$+$

$\Rightarrow$ T.K $= (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$

Örnek: $5^{\ln x} + 5^{1-\ln x} = 6$ denkleminin çözüm kümesini bulalım:

$5^{\ln x} + \dfrac{5}{5^{\ln x}} - 6 = 0$. $5^{\ln x} = t$ olsun.

$\Rightarrow t + \dfrac{5}{t} - 6 = 0 \Rightarrow t^2 - 6t + 5 = 0 \Rightarrow (t-5)(t-1) = 0$

$\Rightarrow t = 5,\ t = 1 \Rightarrow 5^{\ln x} = 5,\ 5^{\ln x} = 1 \Rightarrow \ln x = 1,\ \ln x = 0$

$\Rightarrow x = e \quad , \quad x = 1 \Rightarrow GK = \{1, e\}$.

Hiperbolik fonksiyonlar

Simetrik bir küme üzerinde tanımlanan her fonksiyonu biri çift diğeri tek olan iki fonksiyonun toplamı olarak ifade edebiliriz. Gerçekten de

$$g(x) = \frac{f(x)+f(-x)}{2} \quad , \quad h(x) = \frac{f(x)-f(-x)}{2}$$

olmak üzere

$$f(x) = g(x) + h(x)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $g(-x) = g(x)$ ve $h(-x) = -h(x)$ olup g çift, h ise tek fonksiyondur.

Tanım: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$ fonksiyonunun çift kısmına yani $\frac{f(x)+f(-x)}{2} = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna hiperbolik kosinüs fonksiyonu, tek kısmına, yani $\frac{f(x)-f(-x)}{2} = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$ fonksiyonuna da hiperbolik sinüs fonksiyonu denir. Böylece

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

şeklinde tanımlanır. Bunlardan yararlanarak

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}, \quad \coth x = \frac{\cosh x}{\sinh x} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}, \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = \frac{2}{e^x - e^{-x}}$$

olarak tanımlanır.

Hiperbolik fonksiyonlar için aşağıdaki özellikler vardır:

1) $e^x = \sinh x + \cosh x$ olduğundan $e^{nx} = (\sinh x + \cosh x)^n$ olur.

2) $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$,

3) $\sinh 2x = 2 \sinh x \cosh x$.

4) $\cosh 2x = \cosh^2 x + \sinh^2 x = 2\cosh^2 x - 1 = 2\sinh^2 x + 1$

5) $\tanh^2 x = 1 - \operatorname{sech}^2 x$, $\coth^2 x = 1 + \operatorname{cosech}^2 x$

6) $\sinh(x \mp y) = \sinh x \cosh y \mp \sinh y \cosh x$

7) $\cosh(x \mp y) = \cosh x \cosh y \mp \sinh x \sinh y$

Ters hiperbolik fonksiyonlar

$\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, birebir ve örten fonksiyon olup tersi vardır.

$y = \sinh x = \dfrac{e^x - e^{-x}}{2} \Rightarrow e^x - e^{-x} = 2y \Rightarrow e^x - e^{-x} - 2y = 0$

$\Rightarrow e^{2x} - 2e^x y - 1 = 0$. $e^x = t$ dersek $t^2 - 2yt - 1 = 0$ olur.

Bu denklemin diskriminantı $\Delta = 4y^2 + 4$ olup kökler

$t_{1,2} = \dfrac{2y \mp \sqrt{4y^2+4}}{2} = y \mp \sqrt{y^2+1}$. $y - \sqrt{y^2+1} < 0$ olursa

$e^x > 0$ olduğu için $e^x \neq y - \sqrt{y^2+1}$ olur. O halde $e^x = y + \sqrt{y^2+1}$

olup $x = \ln(y + \sqrt{y^2+1})$ dir.

$\Rightarrow \sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$

Benzer işlemler yapılarak

$\cosh^{-1}: [1,\infty) \to [0,\infty)$, $\cosh^{-1}x = \ln(x+\sqrt{x^2-1})$

$\tanh^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{1-x}$, $x \in (-1,1)$

$\coth^{-1}x = \frac{1}{2}\ln\frac{x+1}{x-1}$, $x \notin [-1,1]$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\text{sech}^{-1}x$ 'i bulalım.

$y = \text{sech}\,x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{2}{e^x+e^{-x}} \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{e^x+e^{-x}}{2} \Rightarrow \frac{1}{y} = \cosh x$

$\Rightarrow \cosh^{-1}\frac{1}{y} = x \Rightarrow \text{sech}^{-1}x = \cosh^{-1}\frac{1}{x} = \ln\left(\frac{1}{x}+\sqrt{\frac{1}{x^2}-1}\right)$

Benzer şekilde

$\text{cosech}^{-1}x = \sinh^{-1}\frac{1}{x}$ ve $\coth^{-1}x = \tanh^{-1}\frac{1}{x}$

olduğu gösterilebilir.

Örnek: $\sinh x = 3$ denkleminin çözüm kümesini bulalım.

$$\sinh x = 3 \Rightarrow \frac{e^x - e^{-x}}{2} = 3 \Rightarrow e^x - e^{-x} - 6 = 0 \Rightarrow e^{2x} - 6e^x - 1 = 0$$

$e^x = t$ dersek $t^2 - 6t - 1 = 0 \Rightarrow \Delta = 40$, $t_{1,2} = \dfrac{6 \mp \sqrt{40}}{2}$

$$= 3 \mp \sqrt{10}$$

$3 - \sqrt{10} < 0$ olduğu için $e^x \neq 3 - \sqrt{10}$ olup $e^x = 3 + \sqrt{10}$ olur.

$\Rightarrow x = \ln(3 + \sqrt{10})$

Aynı problemi $\sinh^{-1} x = \ln(x + \sqrt{x^2+1})$ olduğunu kullanarak

$$\sinh x = 3 \Rightarrow x = \sinh^{-1} 3 = \ln(3 + \sqrt{10})$$

olarak da görebiliriz.

Örnek: $\sinh x = -\frac{3}{4}$ olduğuna göre $\cosh x, \tanh x, \coth x, \operatorname{sech} x, \operatorname{cosech} x$ değerlerini bulalım.

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1 \Rightarrow \cosh^2 x = 1 + \sinh^2 x = 1 + \frac{9}{16} = \frac{25}{16}$$

$\Rightarrow \cosh x = \frac{5}{4}$ ($\cosh x > 0$ olacağı için $\cosh x \neq -\frac{5}{4}$)

$$\tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x} = \frac{-3/4}{5/4} = -\frac{3}{5} \quad , \quad \coth x = \frac{1}{\tanh x} = -\frac{5}{3}$$

$$\operatorname{sech} x = \frac{1}{\cosh x} = \frac{4}{5} \quad , \quad \operatorname{cosech} x = \frac{1}{\sinh x} = -\frac{4}{3}$$

Örnek: $2\cosh(\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$2\cosh(\ln x) = \cancel{2}\,\frac{e^{\ln x} + e^{-\ln x}}{\cancel{2}} = x + e^{\ln \frac{1}{x}} = x + \frac{1}{x}$$

Örnek: $\sinh(2\ln x)$ ifadesinin eşitini bulalım:

$$\sinh(2\ln x) = \frac{e^{2\ln x} - e^{-2\ln x}}{2} = \frac{e^{\ln x^2} - e^{\ln x^{-2}}}{2} = \frac{x^2 - x^{-2}}{2} = \frac{x^2}{2} - \frac{1}{2x^2}$$

Örnek: $\ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x)$ ifadesinin eşitini bulalım

$$\cosh x + \sinh x = e^x \quad , \quad \cosh x - \sinh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} - \frac{e^x - e^{-x}}{2} = e^{-x}$$

$$\Rightarrow \ln(\cosh x + \sinh x) + \ln(\cosh x - \sinh x) = \ln e^x + \ln e^{-x} = x - x = 0$$

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103