



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Dijital Ders Platformu

Trigonometrik
Denklemler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim
Dersleri Matematik
101-103

Trigonometrik denklemler

1) $\sin x = \sin \alpha$, $\sin x = -\sin \alpha$ denklemlerinin çözümleri

$$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya } x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -\sin \alpha \Leftrightarrow x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya } x = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Örnek: $\sin x = \frac{1}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sin x = \frac{1}{2} \Rightarrow \sin x = \sin \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya}$$

$$x = \pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Örnek: $\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya}$$

$$x = \pi + \frac{\pi}{3} + 2k\pi = \frac{4\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$G.K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Örnek: $\sin 3x = \sin(2x + \frac{\pi}{3})$ denkleminin çözümlerini bulunuz.

$$3x = 2x + \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

veya

$$3x = \pi - 2x - \frac{\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow 5x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$G.K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{15} + \frac{2}{5}k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

2) $\cos x = \cos \alpha$, $\cos x = -\cos \alpha$ denkleminin çözümlerini

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya } x = -\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -\cos \alpha \Leftrightarrow x = \pi - \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \text{ veya } x = \pi + \alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Örnek: $\cos x = -1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos x = -1 \Rightarrow \cos x = -\cos 0 \Rightarrow x = \pi - 0 + 2k\pi \text{ veya } x = \pi + 0 + 2k\pi$$

$k \in \mathbb{Z}$

$$\Rightarrow C, K = \{x \in \mathbb{R} : x = (2k+1)\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Örnek: $2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$2\cos^2 x - 5\cos x + 2 = 0 \Rightarrow (2\cos x - 1)(\cos x - 2) = 0$$

$$\Rightarrow 2\cos x - 1 = 0 \text{ veya } \cos x - 2 = 0$$

$$\Rightarrow \cos x = \frac{1}{2} \text{ veya } \cos x = 2$$

$-1 \leq \cos x \leq 1$ olduğundan $\cos x = 2$ olması mümkün değildir.

$$\cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \cos x = \cos \frac{\pi}{3} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C, K = \{x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}\}.$$

Uyarı: $x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ yerine $x = 2\pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi$
 $= \frac{5\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

de yazılabilir.

Örnek: $\cos 2x = \sin \frac{3\pi}{8}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\sin x = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \text{ olduğundan } \sin \frac{3\pi}{8} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{8}\right) = \cos \frac{\pi}{8}$$

$$\Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{8} + 2k\pi \text{ veya } 2x = -\frac{\pi}{8} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{16} + k\pi \text{ veya } x = -\frac{\pi}{16} + k\pi = \pi - \frac{\pi}{16} + k\pi = \frac{15\pi}{16} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C_K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{16} + k\pi \text{ veya } x = \frac{15\pi}{16} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Örnek: $2\cos 2x + \sin x + 3 = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz

$$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x \text{ olduğu gözetilirse alınır}$$

$$2(1 - 2\sin^2 x) + \sin x + 3 = 0 \Rightarrow 4\sin^2 x - \sin x - 5 = 0$$

$$\Rightarrow (4\sin x - 5)(\sin x + 1) = 0 \Rightarrow \sin x = \frac{5}{4} \text{ veya } \sin x = -1$$

$\sin x = \frac{5}{4} > 1$ mümkün değil.

$$\sin x = -1 \Rightarrow \sin x = -\sin \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{2} + \pi + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \text{ veya } x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C_1 K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

3) $\tan x = \tan \alpha$, $\cot x = \cot \alpha$ denklemlerinin çözümleri

$$\tan x = \tan \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = \cot \alpha \Rightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

Örnek: $\tan x = \cot x$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\tan x = \cot x \Rightarrow \tan x = \tan\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \Rightarrow x = \frac{\pi}{2} - x + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow 2x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C_1 K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{\pi}{4} + k\frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Örnek: $(\tan 2x) \cot(3x - \frac{\pi}{3}) = 1$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$\tan x \cot x = 1$ olduğunu biliyoruz. Buna göre

$$\cot x = \frac{1}{\tan x} \text{ yazabiliriz. O halde } \cot(3x - \frac{\pi}{3}) = \frac{1}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})}$$

yatarsak, verilen denklem

$$\frac{\tan 2x}{\tan(3x - \frac{\pi}{3})} = 1 \Rightarrow \tan 2x = \tan(3x - \frac{\pi}{3})$$

halini alır.

$$\Rightarrow 3x - \frac{\pi}{3} = 2x + k\pi, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow G_K = \{x \in \mathbb{R}; x = \frac{\pi}{3} + k\pi\}.$$

4) $\tan x = -\tan \alpha$, $\cot x = -\cot \alpha$ denklemlerinin çözümlerini

$$\tan x = -\tan \alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\cot x = -\cot \alpha \Rightarrow x = \pi - \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}.$$

Örnek: $\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$ denkleminin çözümler kümesini bulunuz.

$$\tan 4x = -\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \tan 4x = -\tan \frac{\pi}{6} \Rightarrow 4x = \pi - \frac{\pi}{6} + k\pi$$
$$= \frac{5\pi}{6} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow \mathcal{K} = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{5\pi}{24} + k\frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

5) $a \cos x + b \sin x = c$ denkleminin çözümlerini

Eşitliğin her iki tarafı a ile bölünerek $\cos x$ in katsayısı 1 yapılır. $\sin x$ in katsayısı olarak bulunur $\frac{b}{a}$ yerine $\tan \alpha$ yazılarak denklemler çözülür.

Örnek: $\sqrt{3} \cos x + 3 \sin x = \sqrt{6}$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\cos x + \frac{3}{\sqrt{3}} \sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \sqrt{3} \sin x = \sqrt{2}$$

$\sqrt{3}$ yerine $\tan \frac{\pi}{3}$ yazılırsa

$$\cos x + \tan \frac{\pi}{3} \sin x = \sqrt{2} \Rightarrow \cos x + \frac{\sin \frac{\pi}{3}}{\cos \frac{\pi}{3}} \sin x = \sqrt{2}$$

$$\Rightarrow \underbrace{\cos \frac{\pi}{3} \cos x + \sin \frac{\pi}{3} \sin x}_{\cos(x - \frac{\pi}{3})} = \sqrt{2} \cos \frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \cos \frac{\pi}{4}$$

$$\Rightarrow x - \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x - \frac{\pi}{3} = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = \frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4} + 2k\pi = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C, K = \left\{ x \in \mathbb{R} : x = \frac{7\pi}{12} + 2k\pi \quad \text{veya} \quad x = \frac{\pi}{12} + 2k\pi, \quad k \in \mathbb{Z} \right\}.$$

Örnek: $\tan x + \cot x - \frac{4\sqrt{3}}{3} = 0$ denkleminin çözüm kümesini bulunuz.

$$\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} = \frac{4\sqrt{3}}{3}$$

(sin x) (cos x)

$$\Rightarrow \frac{1}{\frac{\sin 2x}{2}} = \frac{4\sqrt{3}}{3} \Rightarrow \cancel{2} \cdot \frac{3}{4\sqrt{3}} = \sin 2x \Rightarrow \sin 2x = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \sin 2x = \sin \frac{\pi}{3} \Rightarrow 2x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \text{ veya } 2x = \pi - \frac{\pi}{3} + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\Rightarrow C_K = \left\{ x \in \mathbb{R} : \frac{\pi}{6} + k\pi \text{ veya } x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z} \right\}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim
Dersleri Matematik
101-103