ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

Fonksiyonlarla Yapılan Cebirsel İşlemler

$f: D_f \to \mathbb{R}$, $g: D_g \to \mathbb{R}$ iki fonksiyon, $c \in \mathbb{R}$ sabit olsun.

$$(f \mp g)(x) = f(x) \mp g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$(f \cdot g)(x) = f(x)\, g(x), \quad x \in D_f \cap D_g$$

$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, \quad x \in D_f \cap D_g ; \; g(x) \neq 0$$

$$(cf)(x) = c f(x), \quad x \in D_f .$$

Örnek: $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, $g(x) = \frac{x+1}{x}$ olmak üzere $f+g$, $f \cdot g$, f/g ve $5f$ fonksiyonlarını ve tanım kümelerini bulunuz.

Öncelikle f ve g nin tanım kümelerini bulalım:

$1 - x^2 \geq 0 \Rightarrow 1 \geq x^2 \Rightarrow x \in [-1, 1] \Rightarrow D_f = [-1, 1]$

$D_g = \mathbb{R} - \{0\}$

- $(f+g)(x) = f(x)+g(x) = \sqrt{1-x^2} + \frac{x+1}{x}$

  $D_{f+g} = D_f \cap D_g = [-1,0) \cup (0,1]$

- $(fg)(x) = f(x)g(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}\,(x+1)}{x}$

  $D_{fg} = D_f \cap D_g = [-1,0) \cup (0,1]$

- $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\sqrt{1-x^2}\,x}{x+1}$

  $D_{f/g} = D_f \cap D_g - \{x \in D_g : g(x)=0\} = (-1,0) \cup (0,1]$

- $(5f)(x) = 5f(x)$

  $D_{5f} = D_f = [-1,1]$

Örten fonksiyon: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. Her $y \in B$ için $f(x)=y$ olacak şekilde en az bir $x \in A$ var ise yani B de eşlenmemiş hiç bir eleman yok ise f e örten fonksiyon denir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x)=x^3$ fonksiyonu örten bir fonksiyondur. Gerçekten de her $y \in \mathbb{R}$ için $x = y^{1/3} \in \mathbb{R}$ olarak alınırsa

$$f(x) = f(y^{1/3}) = (y^{1/3})^3 = y$$ dir.

Birebir fonksiyon: $f: A \to B$ bir fonksiyon olsun. $f(x_1)=f(x_2)$ iken $x_1 = x_2$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

Bu tanıma denk olarak $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) \neq f(x_2)$ oluyorsa f e birebir fonksiyon denir.

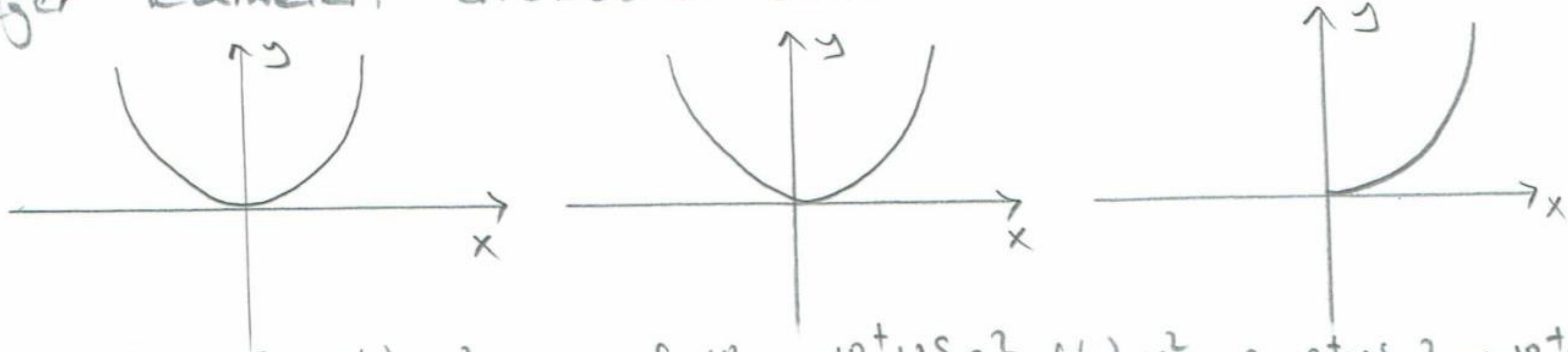
Örnek: Son örnekteki fonksiyon birebirdir. Çünkü; $x_1 \neq x_2$ iken $f(x_1) = x_1^3 \neq x_2^3 = f(x_2)$ dir.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ fonksiyonu birebir değildir.
Çünkü $-1, 1 \in \mathbb{R}$ için $-1 \neq 1$ iken $f(-1) = f(1) = 1$ dir.

Uyarı: . Örten fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en az bir noktada keser.

. Birebir fonksiyonun grafiğinde x eksenine paralel doğrular grafiği en fazla bir noktada keser.

. Örtenlik veya birebirliğe bakılırken tanım ve değer kümeleri dikkate alınır.



$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$
1-1 değil, örten değil

$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $f(x) = x^2$
örten ama 1-1 değil

$f: \mathbb{R}^+ \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$
$f(x) = x^2$
1-1 ve örten

Bileşke fonksiyonlar: f ve g iki fonksiyon olmak üzere $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ fonksiyonuna f ile g nin bileşkesi denir.

$$D_{f \circ g} = \{ x \in D_g : g(x) \in D_f \}$$

$f \circ g$ nin tanım kümesi, $g(x)$ f in tanım kümesinde olmak üzere g nin tanım kümesindeki x lerden oluşur.

Örnek: $f(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = x+1$ ise aşağıdaki fonksiyonları ve tanım kümelerini bulalım:

a) $(f \circ g)(x)$ b) $(g \circ f)(x)$ c) $(f \circ f)(x)$ d) $(g \circ g)(x)$

$D_f = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, $D_g = \mathbb{R}$

a) $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(x+1) = \sqrt{x+1}$, $D_{f \circ g} = [-1, \infty)$

b) $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(\sqrt{x}) = \sqrt{x}+1$, $D_{g \circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

c) $(f \circ f)(x) = f(f(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{\sqrt{x}} = x^{1/4}$, $D_{f \circ f} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$

d) $(g \circ g)(x) = g(g(x)) = g(x+1) = x+2$, $D_{g \circ g} = \mathbb{R}$

Uyarı: Bileşke fonksiyonun formülü ile tanım kümesi belirlemek doğru değildir. Örneğin; $f(x) = x^2$, $g(x) = \sqrt{x}$ için $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = f(\sqrt{x}) = (\sqrt{x})^2 = x$ olup $f \circ g$ nin tanım kümesi $\mathbb{R}$ değildir. Çünkü $g(x) = \sqrt{x}$ fonksiyonu $x \geq 0$ olmasını gerektirir. O halde $D_{f \circ g} = \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ dır.

Bir fonksiyonun grafiğinin kaydırılması

Dikey kaydırma: $y = f(x) + k$ nın grafiğini elde etmek için

$k > 0 \Rightarrow f$ in grafiği k birim yukarı

$k < 0 \Rightarrow$ " " " " aşağı kaydırılır.

Yatay kaydırma: $y=f(x+k)$ grafiğini elde etmek için

$k>0 \Rightarrow$ f in grafiği k birim sola,

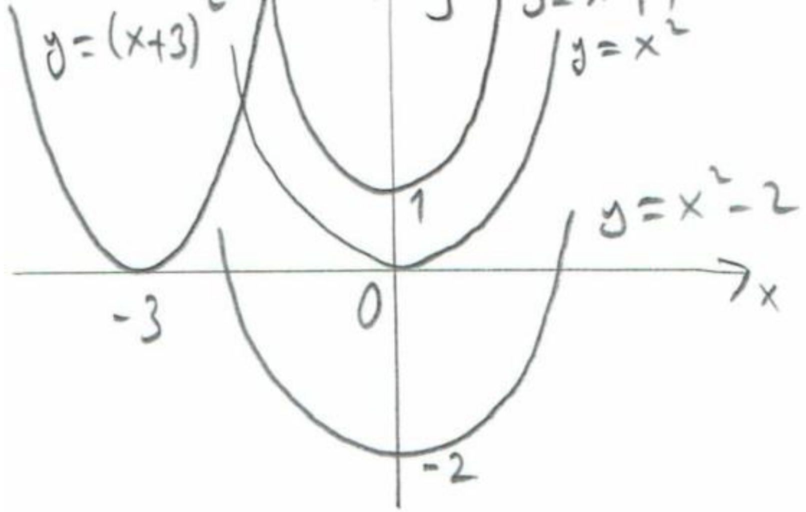
$k<0 \Rightarrow$ " " " " sağa kaydırılır.

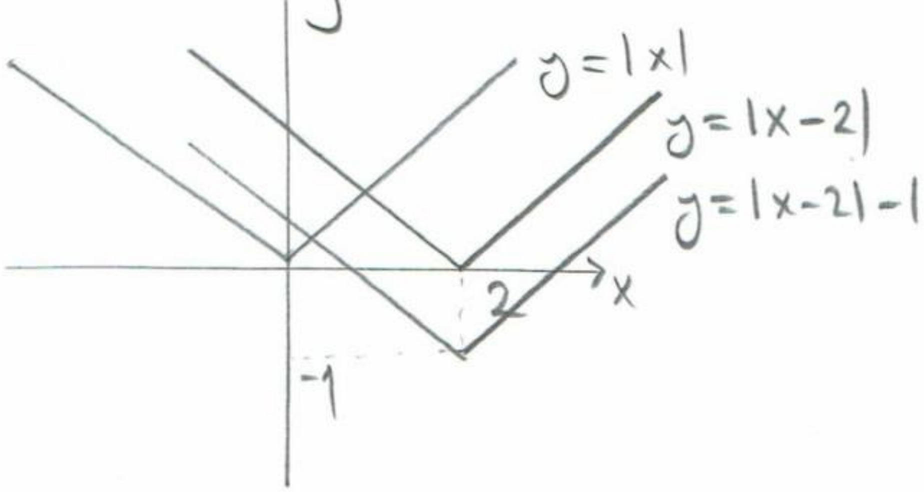
Örnek: • $y=x^2+1$ in grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 1 birim yukarı kaydırılır.

• $y=x^2-2$ nin grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 2 birim aşağı kaydırılır.

• $y=(x+3)^2$ nin grafiğini elde etmek için $y=x^2$ nin grafiği 3 birim sola kaydırılır.

• $y=|x-2|-1$ in grafiğini elde etmek için $y=|x|$ in grafiği 2 birim sağa, 1 birim aşağı kaydırılır.





Dikey ve yatay ölçekleme - yansıtma

$c>1$ için grafik ölçeklendiğinde

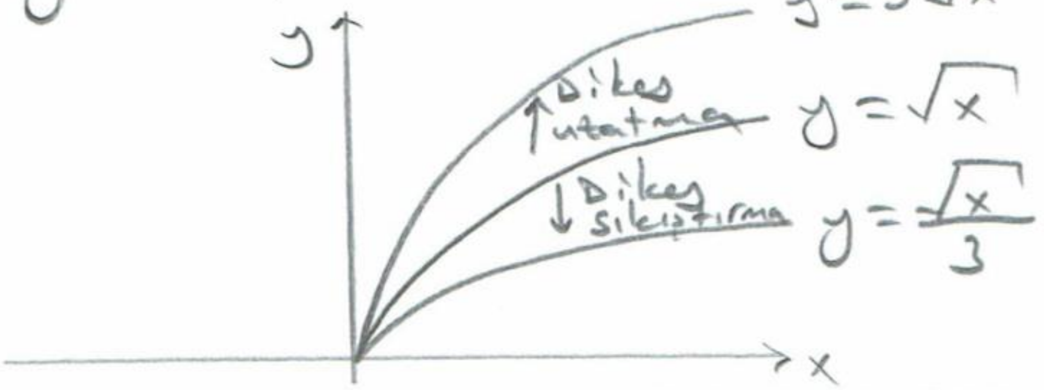
- $y=cf(x)$, f'in grafiğini c çarpanı kadar dikey uzatır,
- $y=\frac{f(x)}{c}$, " " " " " sıkıştırır,
- $y=f(cx)$, " " " " yatay " ",
- $y=f\left(\frac{x}{c}\right)$, " " " " " uzatır.

$c=-1$ için grafik yansıtıldığında;

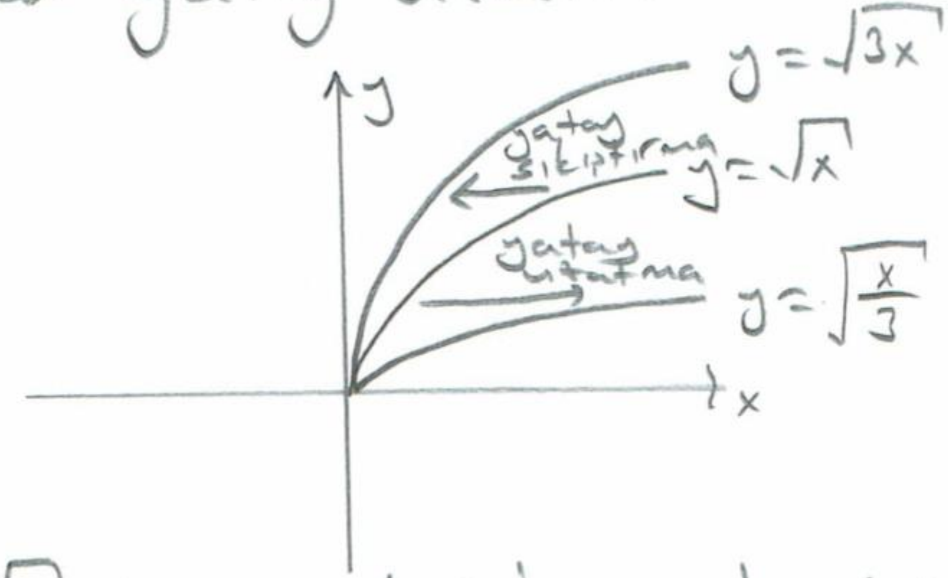
- $y=-f(x)$, f in grafiğini x ekseninin diğer tarafına yansıtır,
- $y=f(-x)$, " " y " " "
" " .

Örnek: $y=\sqrt{x}$ in grafiğini ölçekleyelim ve yansıtalım:

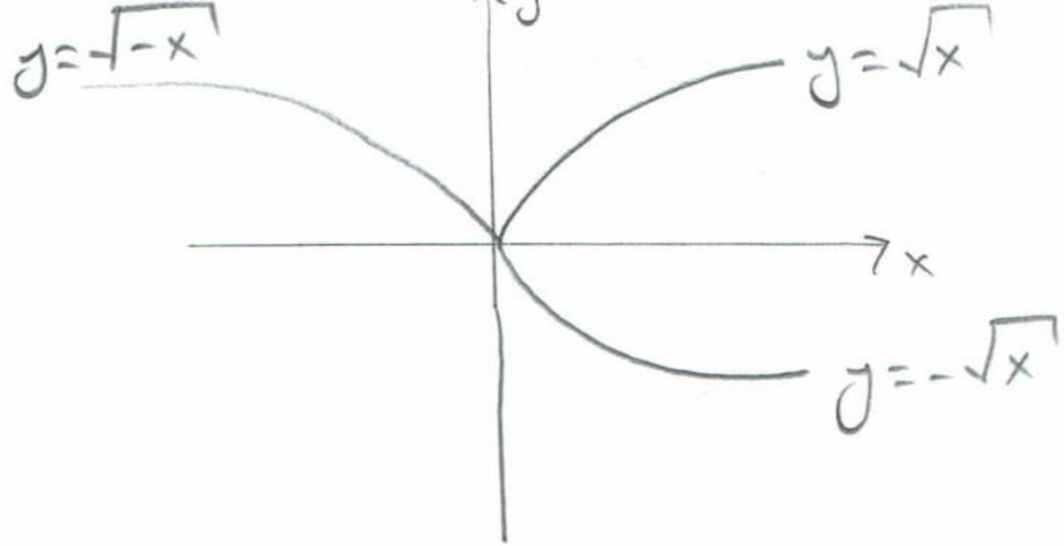
a) Dikey: $y=3\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar dikey uzatırken, $y=\frac{\sqrt{x}}{3}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar dikey sıkıştırır.



b) Yatay: $y=\sqrt{3x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar yatay sıkıştırırken, $y=\sqrt{\frac{x}{3}}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini 3 çarpanı kadar yatay uzatır.



c) $y=-\sqrt{x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini x ekseninin diğer tarafına yansıtırken, $y=\sqrt{-x}$; $y=\sqrt{x}$ in grafiğini y ekseninin diğer tarafına yansıtır.



Örnek:

- $y=x^2-1$ in grafiği dikey olarak 3 çarpanı kadar uzatılırsa $y=3(x^2-1)$,
- $y=x^2-1$ in grafiği yatay olarak 2 çarpanı kadar sıkıştırılırsa $y=(2x)^2-1=4x^2-1$,
- $y=1+\frac{1}{x^2}$ dikey olarak 2 kat sıkıştırılırsa $y=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$,
- $y=\sqrt{4-x^2}$ yatay olarak 2 kat uzatılırsa $y=\sqrt{4-\left(\frac{x}{2}\right)^2}$ elde edilir.

Bir fonksiyonun tersi: $f: A \to B$ birebir ve örten bir fonksiyon olsun. $f \circ g = I_B$ ve $g \circ f = I_A$ olacak şekildeki $g: B \to A$ fonksiyonuna f'in tersi denir ve f^{-1} ile gösterilir. Buna göre

$$f(a) = b \Rightarrow f^{-1}(b) = a$$

dır.

Uyarı: $y = f(x)$ in varsa tersini bulmak için x yalnız bırakılır. Böylece f^{-1} y nin bir fonksiyonu olarak elde edilir. x ile y nin yerleri değiştirilerek $y = f^{-1}(x)$ bulunur.

Örnek: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 - 1$ fonksiyonunun birebir ve örten olduğunu göstererek tersini bulunuz.

$x_1 \neq x_2$ olan $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ için

$f(x_1) = x_1^3 - 1$, $f(x_2) = x_2^3 - 1$ olup $f(x_1) \neq f(x_2)$ dir.

O halde f birebirdir.

Herhangi bir $y \in \mathbb{R}$ alalım. $f(x)=y$ olacak şekilde $x \in \mathbb{R}$ var mı?

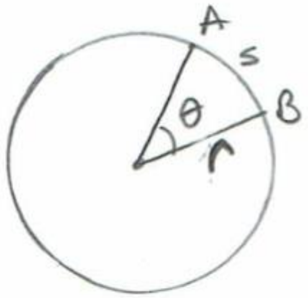
$$y=f(x)=x^3-1 \Rightarrow x^3=y+1 \Rightarrow x=\sqrt[3]{y+1}$$

O halde $f(\sqrt[3]{y+1})=y$ olup f örtendir.

f birebir ve örten olduğu için f^{-1} ters fonksiyonu vardır.

$$f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x+1}$$

Trigonometrik fonksiyonlar:



AB yayının uzunluğu

$$s=\frac{\theta}{2\pi}\cdot 2\pi r=\theta r$$

Eğer çemberi birim çember alırsak $r=1$ olacağından AB yayının uzunluğu $s=\theta$ olur.

Bu derste θ açısının ölçü birimi olarak radyan kullanılacağı için radyan ile derece arasındaki bağıntıya göz atalım:

$$360^\circ = 2\pi \text{ radyan}$$

olduğuna göre

$$\frac{\text{Derece}}{360^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{2\pi} \quad \text{veya} \quad \frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi}$$

yazabiliriz. Örneğin;

45°'nin radyan olarak karşılığı

$$\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\text{Radyan}}{\pi} \Rightarrow \text{Radyan} = \pi\,\frac{45^\circ}{180^\circ} = \frac{\pi}{4}$$

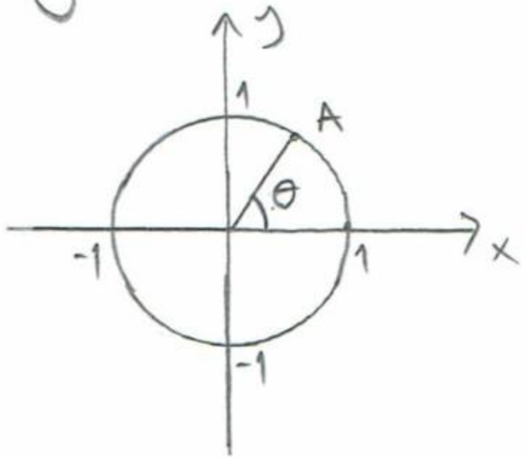
$\frac{\pi}{6}$ radyanın derece olarak karşılığı

$$\frac{\text{Derece}}{180^\circ} = \frac{\pi/6}{\pi} \Rightarrow \text{Derece} = 180^\circ \cdot \frac{\cancel{\pi}}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{\pi}} = 30^\circ$$

Uyarı: Dereceden radyana: $\frac{\pi}{180^\circ}$ ile çarpılır.

Radyandan dereceye: $\frac{180^\circ}{\pi}$ ile çarpılır.

Şimdi analitik düzlemde orijin merkezli birim çember vasıtasıyla trigonometrik fonksiyonları tanımlayalım: Birim çember üzerinde bir A noktası alalım



Birim çember üzerindeki A noktasının apsisine θ reel sayısının kosinüsü, ordinatına ise θ reel sayısının sinüsü denir. Buna göre her $\theta \in \mathbb{R}$ için

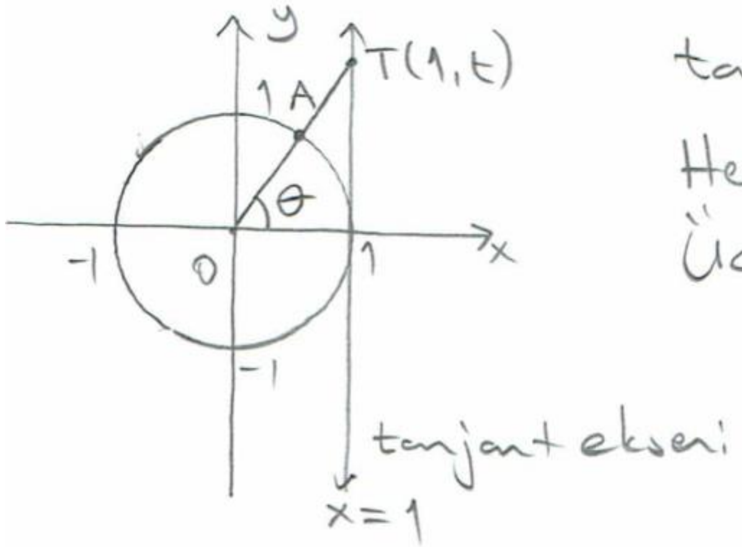
$$-1 \leq \sin\theta \leq 1$$

$$-1 \leq \cos\theta \leq 1$$

dir.

Birim çember üzerindeki A noktasının koordinatları, $A(\cos\theta, \sin\theta)$ şeklindedir.

Koordinat düzleminde x eksenine kosinüs, y eksenine ise sinüs ekseni denir.

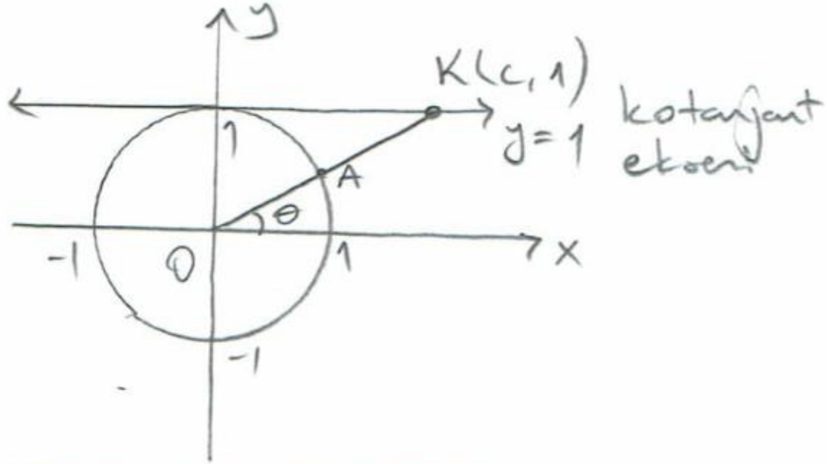


$\tan\theta = t$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\tan\theta \in \mathbb{R}$ dir.

Üçgenlerde benzerlik kullanılarak

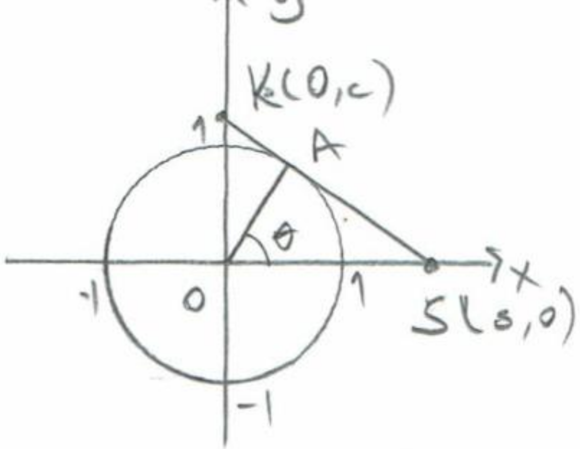
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$



$\cot\theta = c$

Her $\theta \in \mathbb{R}$, $\theta \neq \pi + k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$, için $\cot\theta \in \mathbb{R}$ dir.

$$\cot\theta = \frac{\cos\theta}{\sin\theta}$$



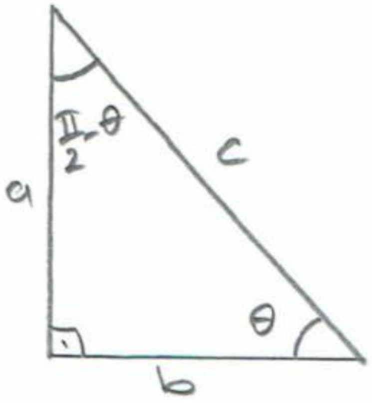
$\operatorname{cosec}\theta = c \ , \quad \sec\theta = s$

$\operatorname{cosec}\theta = \dfrac{1}{\sin\theta} \ , \quad \sec\theta = \dfrac{1}{\cos\theta}$

Uyarı: $\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1 , \quad \tan\theta\cot\theta = 1$

$\sec^2\theta = 1 + \tan^2\theta \ , \quad \operatorname{cosec}^2\theta = 1 + \cot^2\theta$

Dar açıların trigonometrik oranları



$\sin\theta = \dfrac{a}{c} \ , \quad \cos\theta = \dfrac{b}{c} \ , \quad \tan\theta = \dfrac{a}{b} \ , \quad \cot\theta = \dfrac{b}{a}$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cos\theta , \quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \sin\theta$

$\tan\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \cot\theta , \quad \cot\left(\dfrac{\pi}{2} - \theta\right) = \tan\theta$

Ayrıca $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$, $\sin(\pi+\theta)=-\sin\theta$

$\cos(\pi-\theta)=-\cos\theta$ $\cos(\pi+\theta)=-\cos\theta$

$\tan(\pi-\theta)=-\tan\theta$ $\tan(\pi+\theta)=\tan\theta$

$\cot(\pi-\theta)=-\cot\theta$ $\cot(\pi+\theta)=\cot\theta$

Periyodik fonksiyon: $f: A \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Her $x \in A$ için $f(x+p)=f(x)$ olacak şekilde bir p değeri varsa f fonksiyonuna periyodik fonksiyon, bu şartı sağlayan en küçük pozitif p sayısına ise f in periyodu denir.

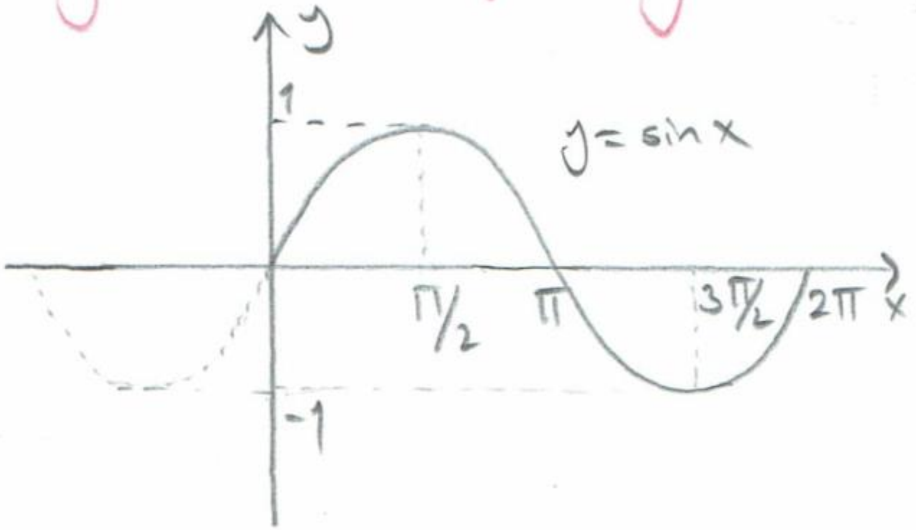
Trigonometrik fonksiyonlardan sinüs ve kosinüsün periyodu 2π, tanjant ve kotanjantın periyodu ise π dir. Yani her $x \in \mathbb{R}$ için

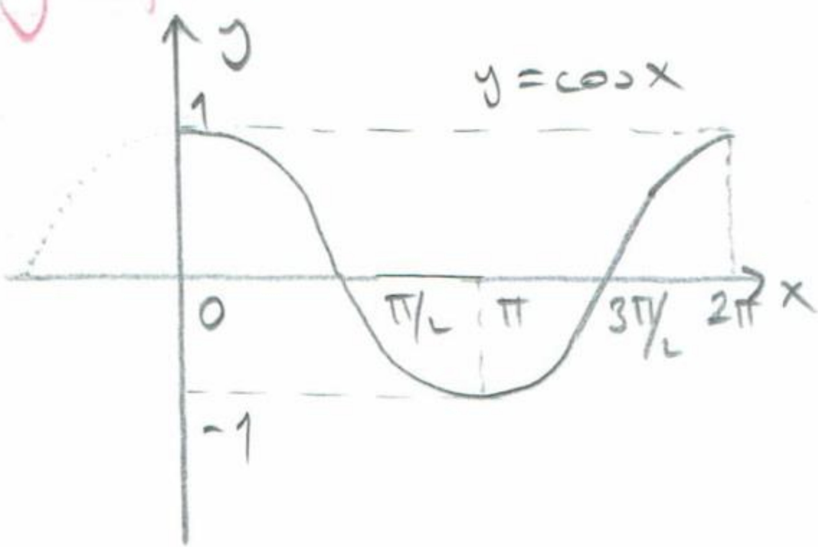
$$\sin(x+2\pi)=\sin x, \quad \cos(x+2\pi)=\cos x$$

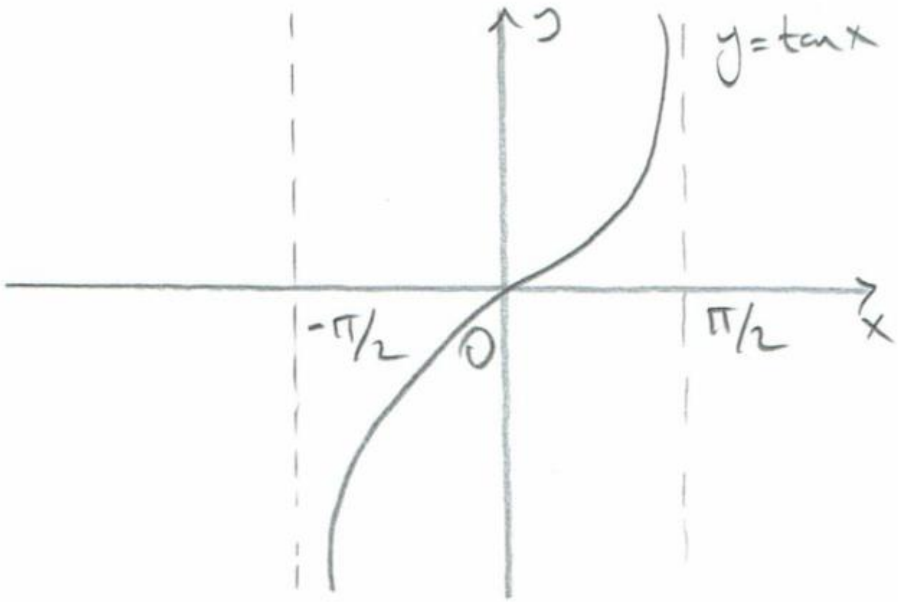
$$\tan(x+\pi)=\tan x, \quad \cot(x+\pi)=\cot x$$

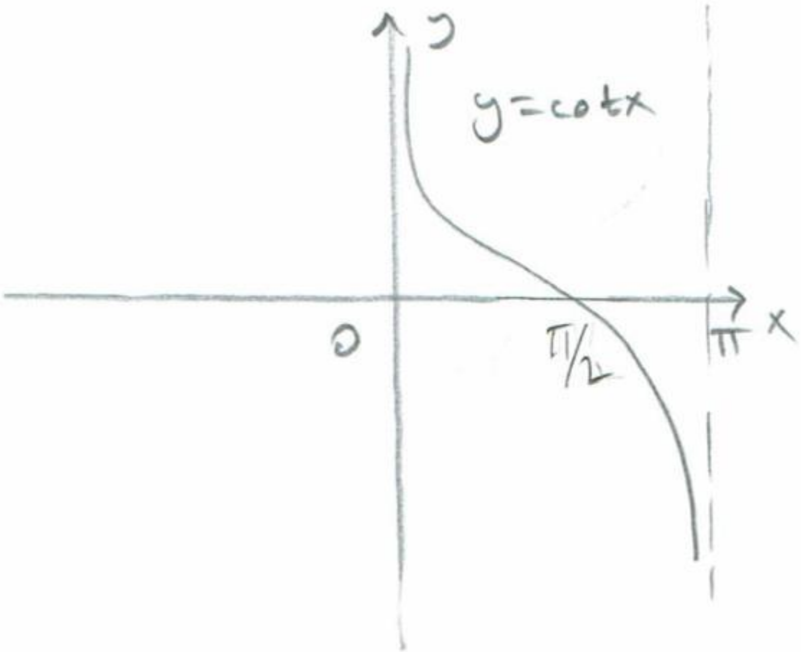
tir.

Trigonometrik fonksiyonların grafikleri









Uyarı: $\cos(-x)=\cos x$, $\sin(-x)=-\sin x$, $\tan(-x)=-\tan x$, $\cot(-x)=-\cot x$ olduğu için $\cos x$ çift, $\tan x$, $\cot x$, $\sin x$ tek fonksiyondur.

Toplam - Fark formülleri

$$\sin(a \mp b) = \sin a \cos b \mp \cos a \sin b$$

$$\cos(a \mp b) = \cos a \cos b \pm \sin a \sin b$$

$$\tan(a \mp b) = \frac{\tan a \mp \tan b}{1 \pm \tan a \tan b}$$

$$\cot(a \mp b) = \frac{\cot a \cot b \pm 1}{\cot a \mp \cot b}$$

Çift açı formülleri

$$\sin 2a = 2 \sin a \cos a$$

$$\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1$$

$$= 1 - 2\sin^2 a$$

$$\tan 2a = \frac{2\tan a}{1-\tan^2 a}$$

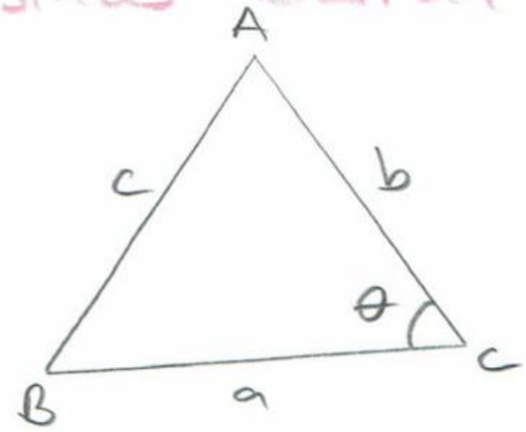
$$\cot 2a = \frac{\cot^2 a - 1}{2\cot a}$$

Yarım açı formülleri

$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1 \Rightarrow \cos^2 a = \frac{1+\cos 2a}{2}$$

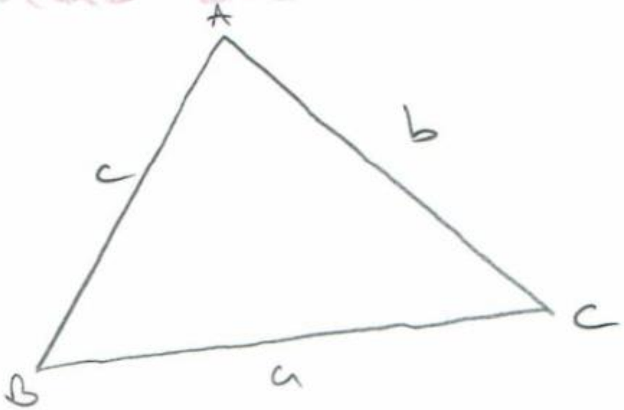
$$\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a \Rightarrow \sin^2 a = \frac{1-\cos 2a}{2}$$

Kosinüs kuralı



$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\theta$$

Sinüs kuralı



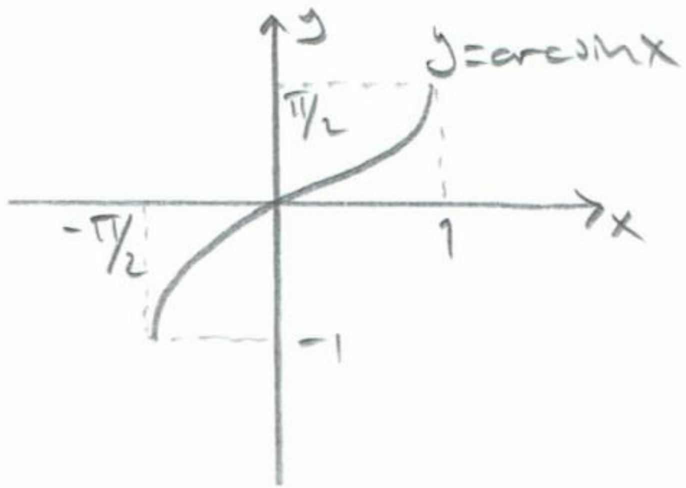
$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

Ters trigonometrik fonksiyonlar

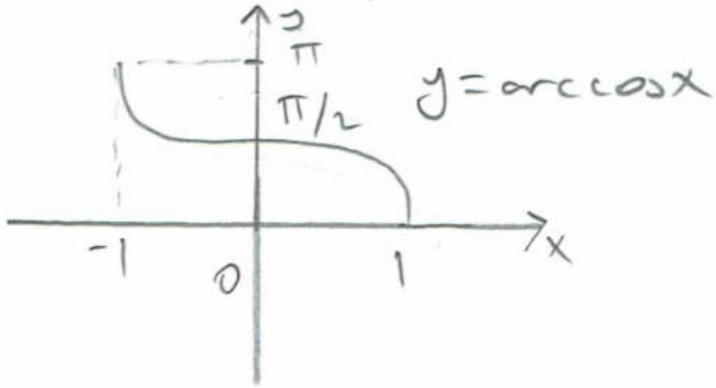
1) $f(x)=\sin x$ fonksiyonu $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ aralığına kısıtlanırsa birebir ve örten olur. Bu fonksiyonun tersine arksinüs fonksiyonu denir, $\sin^{-1}$ veya $\arcsin$ ile gösterilir.

$$\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$$

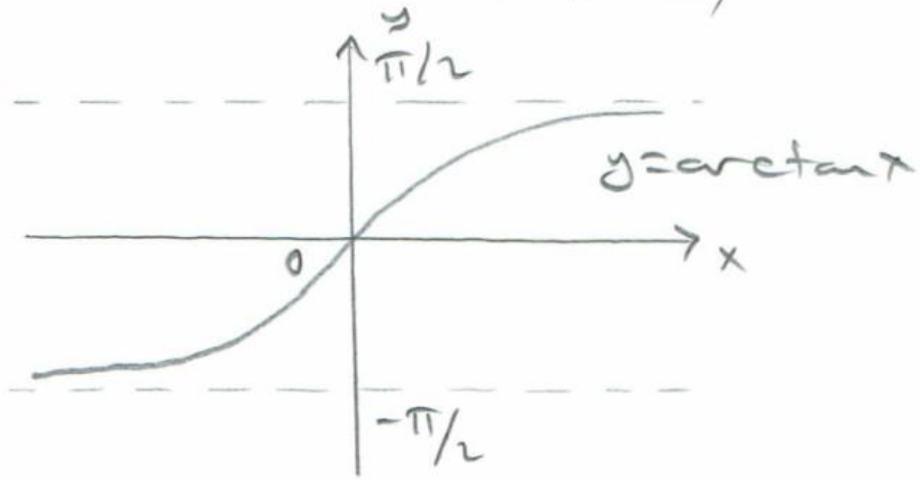
$y=f(x)$ in tersinin grafiği $y=x$ doğrusuna göre simetriği olacağı için $y=\arcsin x$ in grafiği aşağıdaki gibidir.



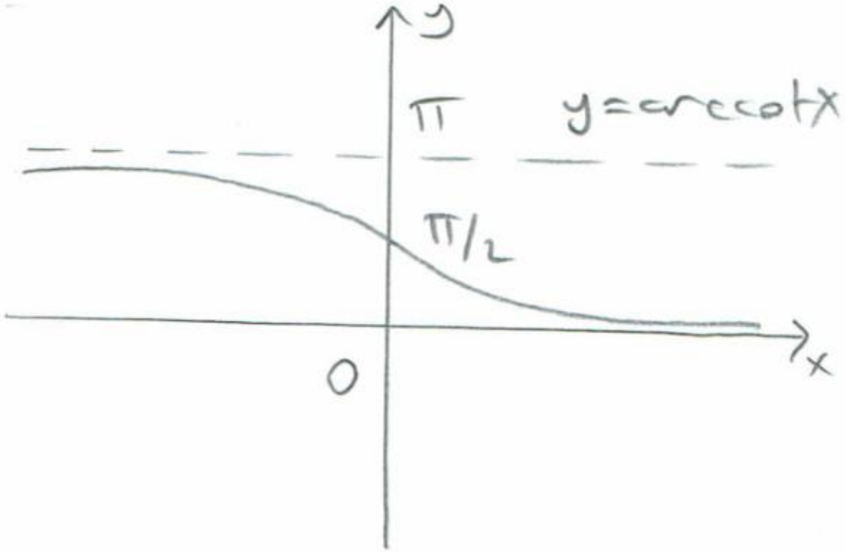
2) $\arccos x : [-1, 1] \to [0, \pi]$



3) $\arctan x : \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$



4) $\operatorname{arccot} x : \mathbb{R} \to (0, \pi)$



UZEM ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103