ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Sayılar - Fonksiyonlar

Dr. Öğr. Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103

SAYILAR

Doğal Sayılar Kümesi $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots\}$

Negatif Doğal Sayılar Kümesi $\mathbb{N}^- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$

Tam Sayılar Kümesi $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \mathbb{N}^- = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \ldots\}$

Rasyonel Sayılar Kümesi $\mathbb{Q} = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0, \text{obeb}(m,n) = 1\}$

Irrasyonel Sayılar Kümesi $\mathbb{Q}^t = \{x : x \notin \mathbb{Q}\}$

Örnek: $\pi, e, \sqrt{3}$ sayıları irrasyoneldir.

Reel Sayılar Kümesi $\mathbb{R} = \mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}^t$

ARALIKLAR

1) a b açık aralığı

$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$

2) a b kapalı aralığı

$[a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$

3) a açık, b kapalı aralığı

$(a,b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

a kapalı, b açık aralığı

$[a,b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$

Uyarı: (a,b), $(a,b]$, $[a,b)$ ve $[a,b]$ aralıkları birbirinden farklı olmasına rağmen hepsinin boyu $b-a$ kadardır.

4) $(a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a < x\}$

$[a,\infty) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x\}$

$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} : x < a\}$

$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} : x \leq a\}$

$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R}\} = \mathbb{R}$

Genişletilmiş Reel Sayılar Kümesi: $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ kümesine genişletilmiş reel sayılar kümesi denir ve $\tilde{\mathbb{R}}$ ile gösterilir.

$\tilde{\mathbb{R}}$ de bazı işlemler

Herhangi bir $a \in \mathbb{R}$ için

$a + \infty = \infty \quad , \quad a - \infty = -\infty$

$a > 0$ ise $\quad a\infty = \infty \; , \; a(-\infty) = -\infty \; , \; \dfrac{\infty}{a} = \infty \; , \; \dfrac{-\infty}{a} = -\infty$

$a < 0$ ise $\quad a\infty = -\infty \; , \; a(-\infty) = \infty \; , \; \dfrac{\infty}{a} = -\infty \; , \; \dfrac{-\infty}{a} = \infty$

$\infty + \infty = \infty \; , \; -\infty - \infty = -\infty \; , \; \infty . \infty = \infty \; , \; (-\infty)(-\infty) = \infty$

$\infty . (-\infty) = -\infty \; , \; \dfrac{a}{\infty} = 0 \; , \; \dfrac{a}{-\infty} = 0$

Bunların dışında kalan $\frac{0}{0}$, $\infty-\infty$, $0.\infty$, 1^∞, 0^∞, ∞^0 ve $\frac{\infty}{\infty}$ işlemlerine $\tilde{\mathbb{R}}$ de belirsizlikler denir.

Mutlak Değer: Herhangi bir $x\in\mathbb{R}$ sayısının orijine uzaklığına x in mutlak değeri denir ve $|x|$ ile gösterilir.

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlıdır.

Mutlak Değer Özellikleri

$a, x, y \in \mathbb{R}$, $a \geq 0$ olsun.

1) $|x| \geq 0$ 2) $|x| = a \Rightarrow x = a \vee x = -a$

3) $|xy| = |x||y|$, $\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|}$ $(y \neq 0)$

4) $|x| \leq a \Rightarrow -a \leq x \leq a$

5) $|x| > a \Rightarrow x > a \lor x < -a$

$|x| \geq a \Rightarrow x \geq a \lor x \leq -a$

6) $|x| = |y| \Rightarrow x = \mp y$

7) $\sqrt{y^2} = |y|$

8) $-|x| \leq x \leq |x|$

9) $|x+y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

10) $||x| - |y|| \leq |x-y|$

Örnek: $\left|\frac{2x-3}{2x-6}\right| = \frac{2x-3}{2x-6}$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$\frac{2x-3}{2x-6} \geq 0$ olmalıdır. İşaret tablosu yapılırsa

$2x-3=0 \Rightarrow x = 3/2$ ve $2x-6=0 \Rightarrow x = 3$

x		$3/2$		3	
$2x-3$	$-$	0	$+$		$+$
$2x-6$	$-$		$-$	0	$+$
$\frac{2x-3}{2x-6}$	$+$	0	$-$		$+$

$GK = (-\infty, \frac{3}{2}] \cup (3, \infty)$

Örnek: $|5x+1| = 3$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$5x+1 = 3$ veya $5x+1 = -3$ olmalı

$\Rightarrow x = \frac{2}{5}$ veya $x = -\frac{4}{5} \Rightarrow GK = \{-\frac{4}{5}, \frac{2}{5}\}$

Tam Değer: $x \in \mathbb{R}$ olsun. x den küçük yada eşit olan en büyük tam sayıya x in tam değeri denir ve $[\![x]\!]$ ile gösterilir.

Örnek: $[\![3,2]\!] = 3$, $[\![3]\!] = 3$, $[\![-1,2]\!] = -2$, $[\![-1]\!] = -1$

$[\![\pi]\!] = 3$, $[\![e]\!] = 2$

Tam Değerin Özellikleri

$x, y \in \mathbb{R}$, $a \in \mathbb{Z}$ olsun.

1) $[\![x]\!] = a \Rightarrow a \leq x < a+1$

2) $[\![x \mp a]\!] = [\![x]\!] \mp a$

3) $[\![x+y]\!] \geq [\![x]\!] + [\![y]\!]$

4) $x = [\![x]\!] + t$, $0 \leq t < 1$

5) $[\![x]\!] \leq x$

6) $[\![x]\!] < a \Rightarrow x < a$

Örnek: $[\![-3x]\!] = -3$ ise çözüm kümesini bulunuz.

$-3 \leq -3x < -2 \Rightarrow 1 \geq x > \frac{2}{3} \Rightarrow Ç.K = (\frac{2}{3}, 1]$

Örnek: $-2 < [\![2x-4]\!] \leq 1$ eşitsizliğinin çözüm kümesini bulunuz.

$-1 \leq 2x-4 < 2$ olmalıdır.

$\Rightarrow 3 \leq 2x < 6 \Rightarrow \frac{3}{2} \leq x < 3 \Rightarrow ÇK = [\frac{3}{2}, 3)$

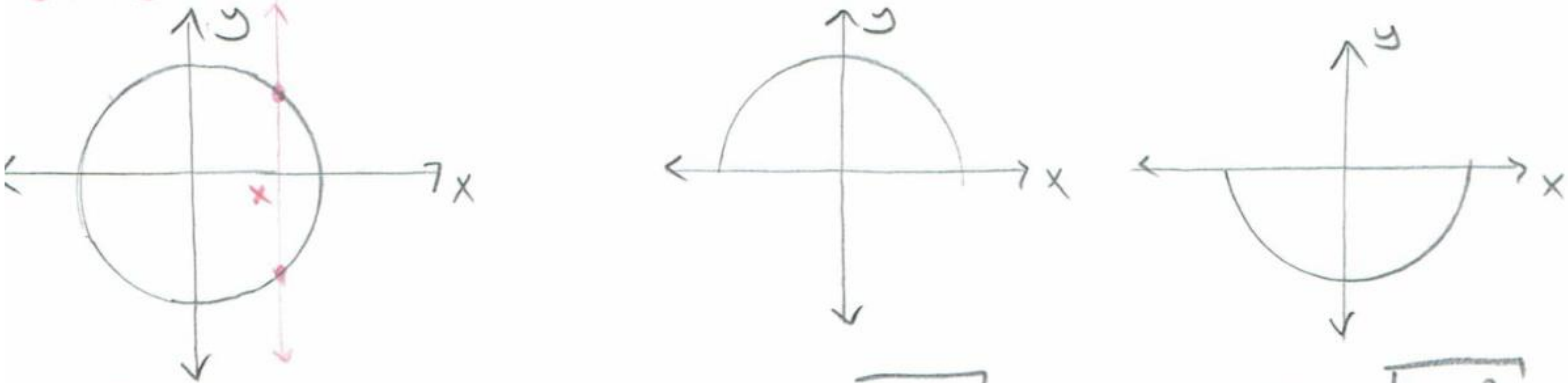
Fonksiyon: A ve B boş olmayan iki küme olmak üzere A daki her elemanı B deki yalnız bir eleman ile eşleyen kurala A dan B ye bir fonksiyon denir. A ya tanım kümesi, B ye ise değer kümesi denir. A daki elemanların eşlendiği B deki elemanların kümesine ise görüntü kümesi denir.

Örnek:

Fonksiyon	Tanım kümesi	Görüntü kümesi
$y=x^2$	$\mathbb{R}$	$[0,\infty)$
$y=\frac{1}{x}$	$\mathbb{R}-\{0\}$	$\mathbb{R}-\{0\}$
$y=\sqrt{x}$	$[0,\infty)$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{4-x}$	$(-\infty,4]$	$[0,\infty)$
$y=\sqrt{1-x^2}$	$[-1,1]$	$[0,1]$

Bir fonksiyon için dikey doğru testi: Bir f fonksiyonu, tanım kümesindeki her x için sadece bir $f(x)$ değerine sahip olduğundan hiçbir dikey doğru fonksiyonun grafiğini birden fazla yerde kesemez.

Örnek



$x^2+y^2=1$ — Fonksiyon değil

$y=\sqrt{1-x^2}$ — Fonksiyon

$y=-\sqrt{1-x^2}$ — Fonksiyon

Artan-Azalan Fonksiyonlar: $f: I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere herhangi iki $x_1, x_2 \in I$ verilsin.

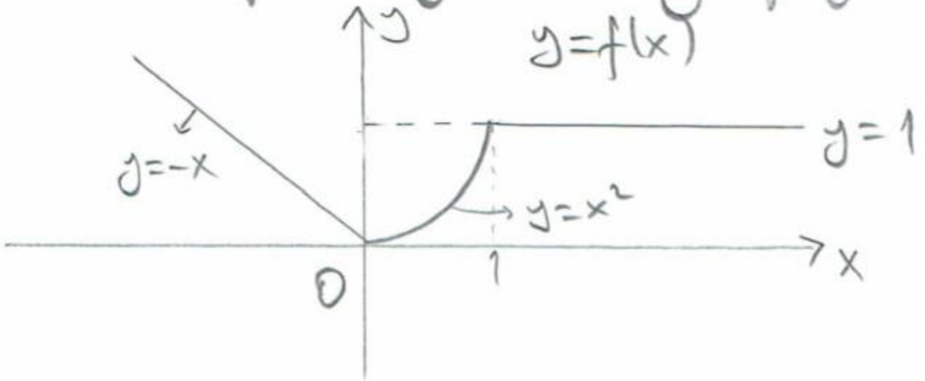
$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) < f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde artandır denir.

$x_1 < x_2$ iken $f(x_1) > f(x_2)$ oluyorsa f fonksiyonuna I üzerinde azalandır denir.

Örnek: $f(x) = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x^2, & 0 \leq x \leq 1 \\ 1, & 1 < x \end{cases}$ fonksiyonu $(-\infty, 0]$ aralığında azalan, $[0,1]$ aralığında artan, $(1, \infty)$ aralığında ne azalan ne de artandır.

Uyarı: Reel eksende soldan sağa hareket edildiğinde fonksiyonun grafiği yükseliyorsa fonksiyon artan, alçalıyorsa fonksiyon azalandır.

Örnekteki fonksiyonun grafiğine bakalım:



Tek-Çift Fonksiyonlar: $f: D \to \mathbb{R}$ fonksiyon olsun. Her $x \in D$ için $f(-x)=f(x)$ oluyorsa f e çift fonksiyon, $f(-x)=-f(x)$ oluyorsa f e tek fonksiyon denir.

Örnek: $f(x)=x^2$ çift fonksiyondur. Çünkü;

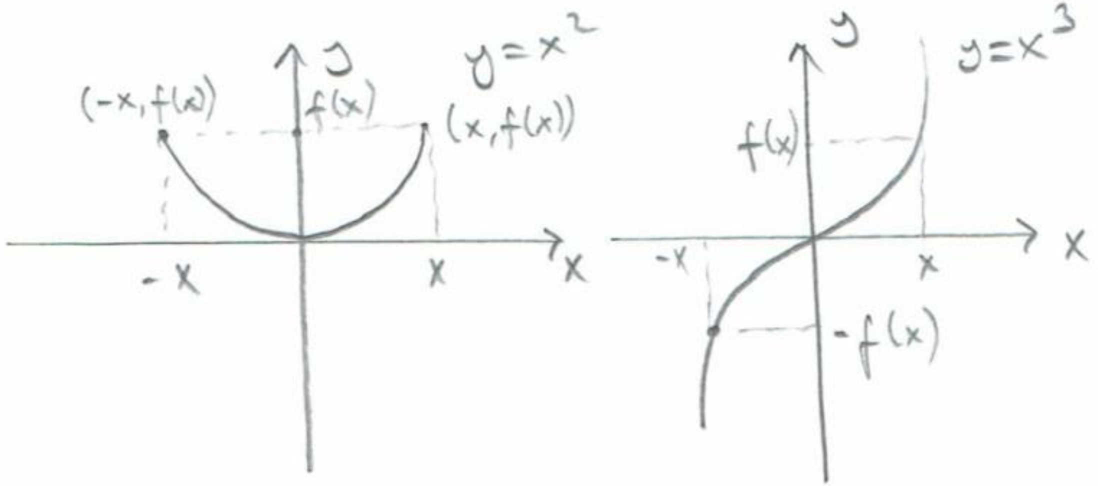
$$f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$$ dir.

- $g(x)=x^3$ tek fonksiyondur. Çünkü;

$$g(-x)=(-x)^3=-x^3=-g(x)$$ dir.

- $h(x)=x+1$ ne tek ne de çift fonksiyondur.

Uyarı: f bir çift fonksiyon ise $(x, f(x))$ ve $(-x, f(x))$ fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f'in grafiği y eksenine göre simetriktir. f bir tek fonksiyon ise $(x, f(x))$ ve $(-x, -f(x))$ fonksiyonun grafiği üzerinde olacağından f'in grafiği orijine göre simetriktir.

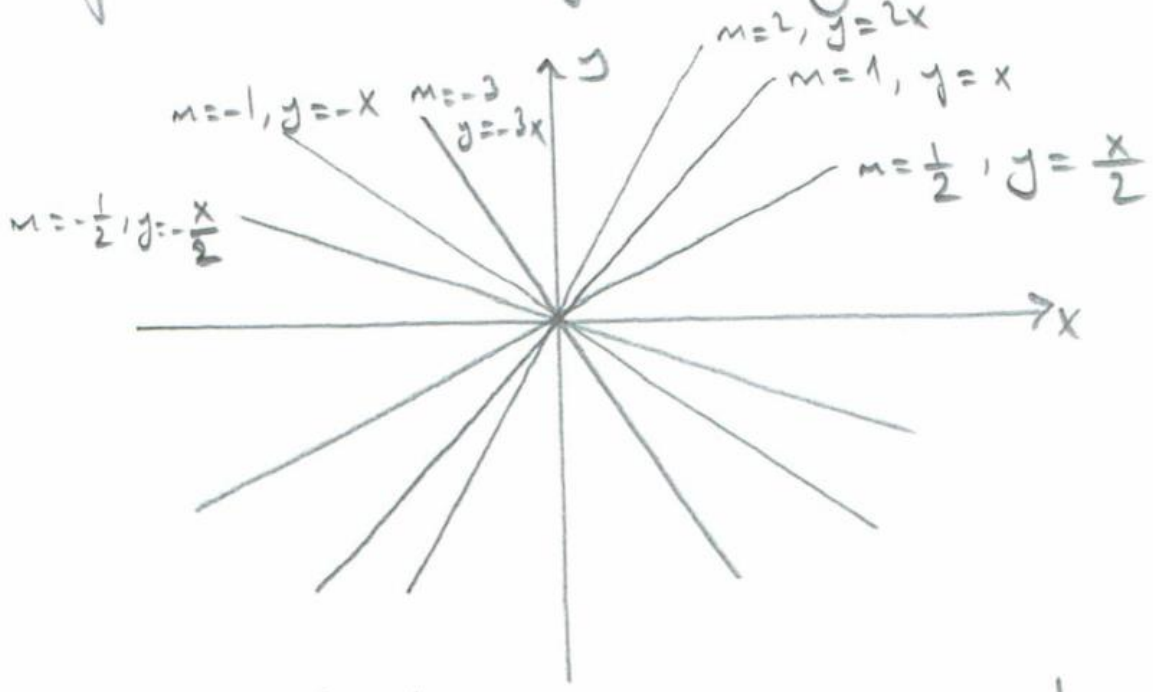


Özel Fonksiyonlar

Lineer Fonksiyonlar: m ve n sabit olmak üzere $f(x)=mx+n$ şeklindeki fonksiyona lineer fonksiyon denir.

$m=1, b=0$ için $f(x)=x$ fonksiyonuna birim fonksiyon denir.

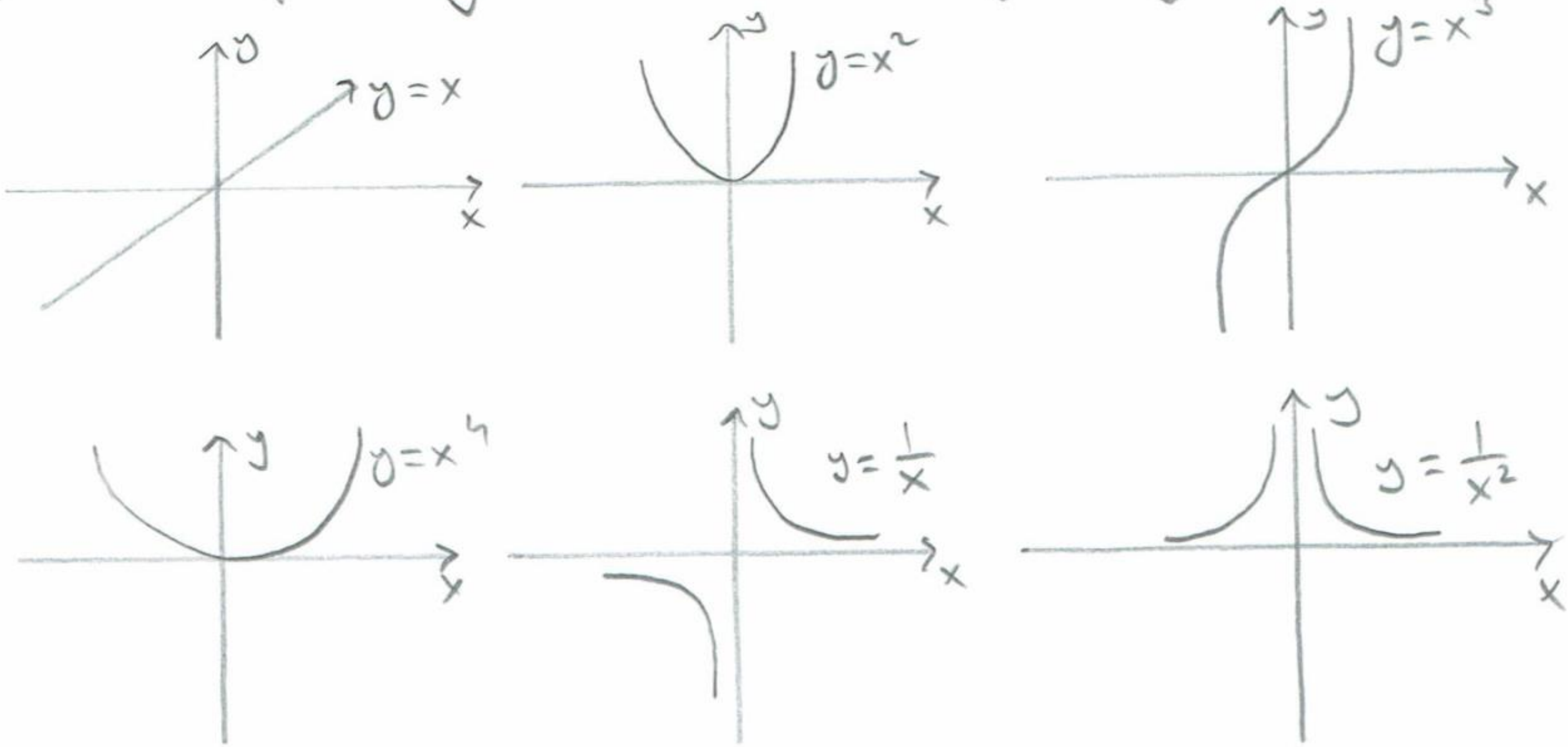
$b=0$ ise $f(x)=mx$ orijinden geçer.

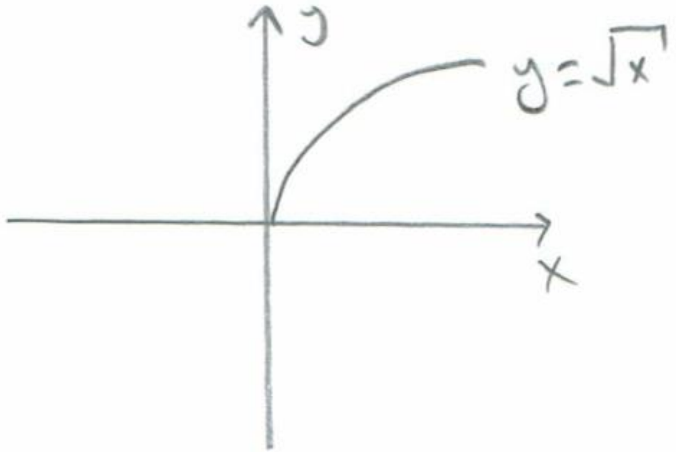


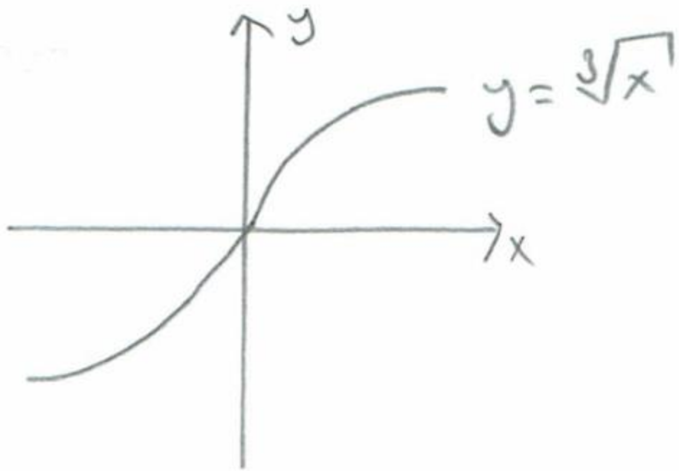
Uyarı: $f(x)=mx+n$ fonksiyonu eğimi m olan doğrudur.

Egim $m=0$ ise $f(x)=b$ fonksiyonuna sabit fonksiyon denir.

Kuvvet fonksiyonu: a sabit bir sayı olmak üzere $f(x)=x^a$ fonksiyonuna kuvvet fonksiyonu denir.



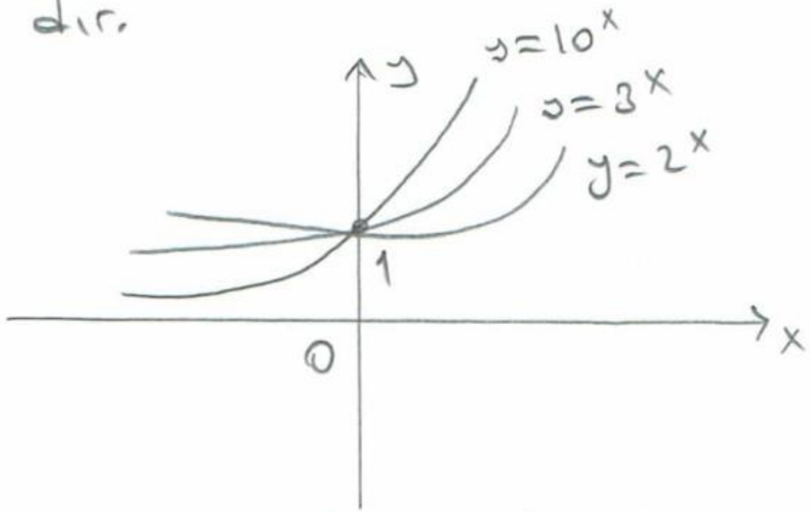


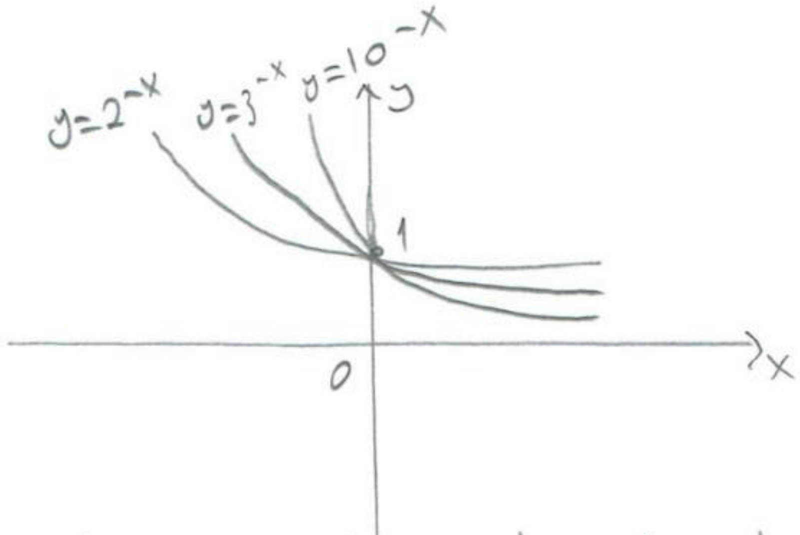


Polinomlar: $n \in \mathbb{N}$, $a_0, a_1, \dots, a_n$ sabit reel sayılar olmak üzere $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ şeklinde tanımlı p fonksiyonuna polinom denir. $n \neq 0$ ise n ye polinomun derecesi denir. Polinomlar $\mathbb{R}$ üzerinde tanımlıdır.

Rasyonel fonksiyonlar: p ve q polinom olmak üzere $f(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ fonksiyonuna rasyonel fonksiyon denir. Bir rasyonel fonksiyon $q(x) \neq 0$ olan tüm x reel sayıları için tanımlıdır.

Üstel fonksiyonlar: $a \in \mathbb{R}^+$, $a \neq 1$ olmak üzere $f(x) = a^x$ şeklindeki fonksiyona üstel fonksiyon denir. Tüm üstel fonksiyonların tanım kümesi $\mathbb{R}$ ve görüntü kümesi $\mathbb{R}^+$ dır.





Cebirsel fonksiyonlar: Polinomlardan cebirsel işlemler ile (toplama, çıkarma, bölme, çarpma ve kök alma) elde edilen fonksiyonlara cebirsel fonksiyon denir.

Transendantal fonksiyonlar: Cebirsel olmayan fonksiyonlara denir. Trigonometrik, ters trigonometrik, logaritmik fonksiyonlar bu tip fonksiyonlara örnektir.

Tam değer fonksiyonu: $f: A \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonuna tam değer fonksiyonu denir.

Örnek: $f: [-2,2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = [\![x]\!]$ fonksiyonunun grafiğini çizelim.

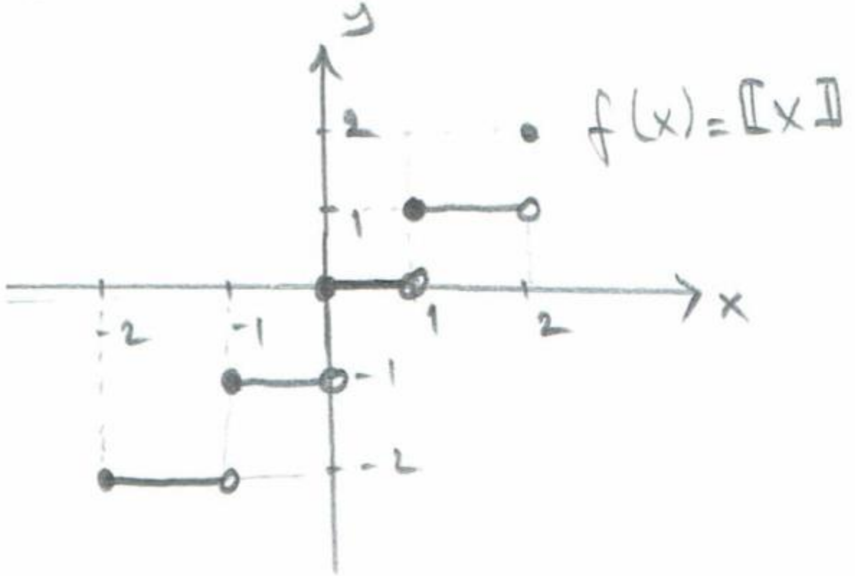
$-2 \leq x < -1$ için $f(x) = -2$

$-1 \leq x < 0$ için $f(x) = -1$

$0 \leq x < 1$ için $f(x) = 0$

$1 \leq x < 2$ için $f(x) = 1$

$x = 2$ için $f(2) = 2$

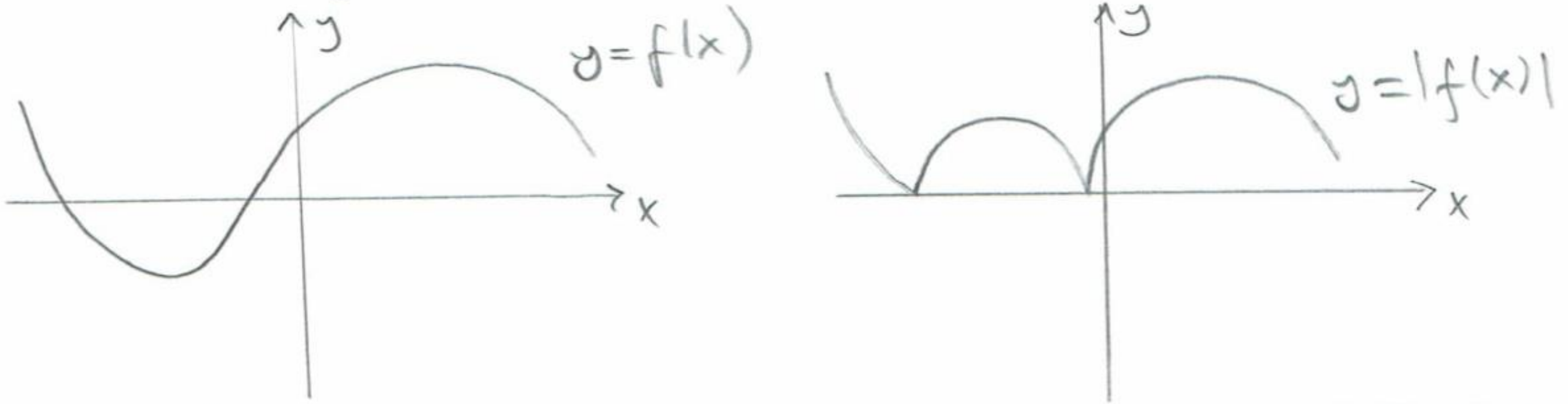


Mutlak değer fonksiyonu: $A \subset \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$

$$|f|(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), & f(x) \geq 0 \\ -f(x), & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

fonksiyona f fonksiyonunun mutlak değer fonksiyonu denir.

Örnek: $y = |f(x)|$ in grafiği çizilirken $y = f(x)$ in grafiğinde x ekseninin üstünde kalan noktalar aynen alınır, " " altında " " in x eksenine göre simetriği alınarak çizim tamamlanır.



İşaret fonksiyonu;

$$sgn f(x) = \begin{cases} 1, & f(x) > 0 \\ 0, & f(x) = 0 \\ -1, & f(x) < 0 \end{cases}$$ şeklinde tanımlanan

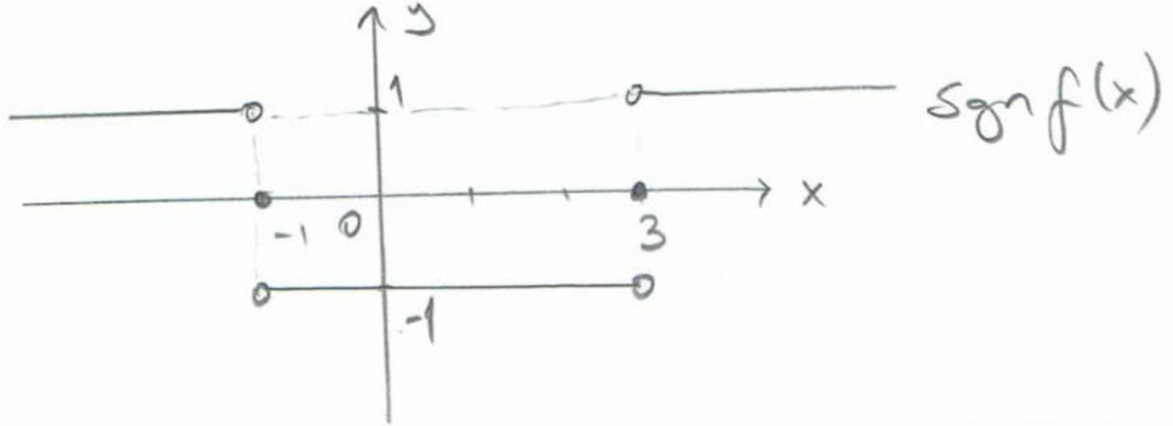
fonksiyondur.

Örnek: $f(x) = x^2 - 2x - 3$ olmak üzere $sgn f(x)$ in grafiğini çizelim:

$x^2 - 2x - 3 = 0 \Rightarrow (x-3)(x+1) = 0 \Rightarrow x = 3, \; x = -1$

x		-1		3	
x^2-2x-3	$+$	0	$-$	0	$+$

$$\Rightarrow sgn f(x) = \begin{cases} 1, & x < -1 \text{ veya } x > 3 \\ 0, & x = -1 \text{ veya } x = 3 \\ -1, & -1 < x < 3 \end{cases}$$



ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Dr. Öğretim Üyesi Ergin BAYRAM

Temel Bilim Dersleri Matematik 101-103