ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

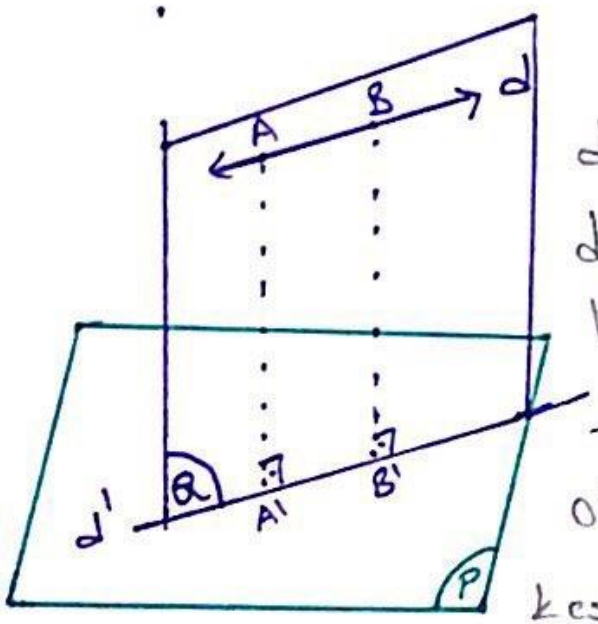
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 18

BİR DOĞRUNUN BİR DÜZLEM ÜZERİNDEKİ DİK İZDÜŞÜMÜ



Bir P düzlemi ve P nin dışında olan bir d doğrusu verilsin. d nin P üzerine olan dik izdüşümünü bulmak demek, d nin üzerindeki her noktadan P ye inilen dikmelerin P yi kestiği noktaları bulmak demektir. $A, B \in d$ olsun. A ve B den inilen dikmelerin P yi kestiği noktalar A' ve B' olmak üzere, A' ve B' den geçen d' doğrusu d nin P üzerine olan dik izdüşümüdür.

d' yü şu şekilde bulabiliriz: d den geçen ve P ye dik olan Q düzlemi düzlem demeti yardımıyla bulunur.

$d' \ldots (P=0,\ Q=0)$ olacaktır.

Örnek: $d \ldots (x+y+z-2=0,\ x+2y+z-2=0)$ doğrusunun $P \ldots 3x+y+3z-1=0$ düzlemi üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$x+y+z-2+\lambda(x+2y+z-2)=0$$

$$\Rightarrow (1+\lambda)x+(1+2\lambda)y+(1+\lambda)z-2-2\lambda=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden P ye dik olanı arıyoruz:

$$\vec{n}_\lambda=(1+\lambda,\ 1+2\lambda,\ 1+\lambda)\ ,\ \vec{n}_p=(3,1,3)$$

$$\vec{n}_\lambda \perp \vec{n}_p \Rightarrow 3(1+\lambda)+1+2\lambda+3(1+\lambda)=0 \Rightarrow \lambda=-\frac{7}{8}$$

$$\Rightarrow Q \ldots x-6y+z-2=0$$

P ve Q nun denklemleri ortak çözülürse,

$$d' \ldots \frac{x+\frac{2}{19}}{-1}=\frac{y+\frac{5}{19}}{0}=\frac{z}{1}=t \text{ bulunur.}$$

Örnek: $d \ldots (2x-y+z-1=0,\ x+2y-z+1=0)$ doğrusunun xOz düzlemi üzerine dik izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

d den geçen tüm düzlemler,

$$2x-y+z-1+\lambda(x+2y-z+1)=0$$

$$\Rightarrow (2+\lambda)x+(-1+2\lambda)y+(1-\lambda)z-1+\lambda=0$$

şeklindedir. Bu düzlemlerin içerisinden $P \ldots y=0$ düzlemine dik olanı arıyoruz:

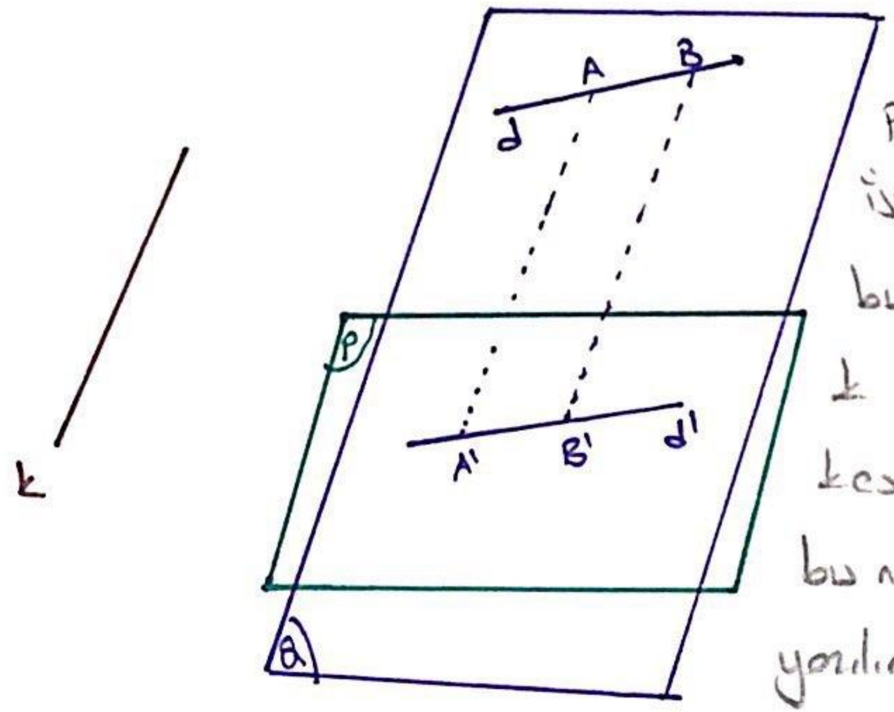
$$\vec{n}_\lambda=(2+\lambda,\ -1+2\lambda,\ 1-\lambda)\ ,\ \vec{n}_P=(0,1,0)$$

$\vec{n}_\lambda \perp \vec{n}_P \Rightarrow -1+2\lambda=0 \Rightarrow \lambda=1/2$ bulunur.

$\Rightarrow Q \ldots 5x+z-1=0$ olur.

$d' \ldots (P=0,\ Q=0)$ olup $d' \ldots \begin{cases} x=t \\ y=0 \\ z=1-5t \end{cases}$ bulunur.

BİR DOĞRUNUN VERİLEN BİR DOĞRUYA PARALEL OLARAK BİR DÜZLEM ÜZERİNE İZDÜŞÜMÜ



Bir d doğrusunun k doğrusuna paralel olacak biçimde P düzlemi üzerine izdüşümü olan d' doğrusu bulunurken A, B ∈ d noktalarından k ya çizilen paralellerin P yi kestiği A' ve B' noktaları bulunup bu noktalardan geçen doğru denklemi yazılır.

Veya;

d den geçen ve k doğrusuna paralel olan Q düzlemi düzlem demeti yardımıyla bulunur.

$$d' \ldots (P=0,\ Q=0) \text{ olur.}$$

Örnek: $d \ldots \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z+1}{1} = \lambda$ doğrusunun

$k \ldots \dfrac{x+1}{3} = \dfrac{y}{1} = \dfrac{z}{1} = t$ doğrusuna paralel olacak biçimde

$P \ldots x+z-1=0$ düzlemi üzerine izdüşümünü bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y}{2} \text{ ve } \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} \text{ den } d \ldots (2x-3y-4=0,\ y-2z-2=0)$$

olur.

d den geçen tüm düzlemler $2x-3y-4+\lambda(y-2z-2)=0$

$$\Rightarrow 2x+(-3+\lambda)y-2\lambda z-4-2\lambda=0$$

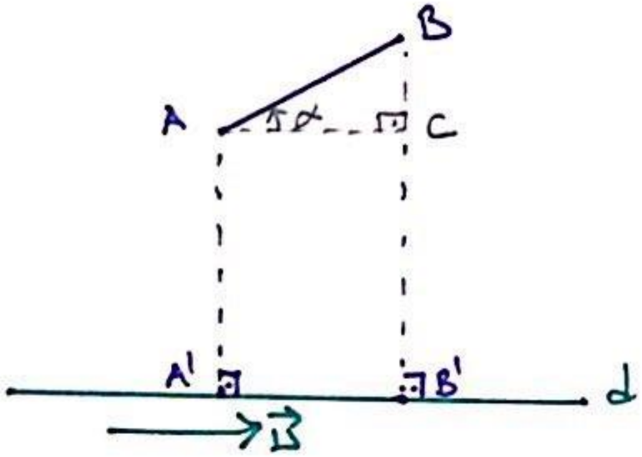
şeklindedir. Bu düzlemlerden k ya paralel olan Q düzlemini arıyoruz.

$$\vec{n}_\lambda = (2,-3+\lambda,-2\lambda),\ \vec{u}_k = (3,1,1) \text{ olup } \vec{u}_k \perp \vec{n}_\lambda \text{ dan } \lambda = 3$$

$\Rightarrow Q \ldots x-3z-5=0$ bulunur.

$\Rightarrow d' \ldots (P=0, Q=0) \rightarrow d' \ldots x=2,\ y=t,\ z=-1$ bulunur.

BİR DOĞRU PARÇASININ BİR DOĞRU ÜZERİNDEKİ İZDÜŞÜMÜNÜN UZUNLUĞU



$\|\overrightarrow{A'B'}\| = ?$

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ dir.

$\overrightarrow{AB}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı α olmak üzere,

$$\langle \overrightarrow{AB}, \vec{u} \rangle = \|\overrightarrow{AB}\| . \|\vec{u}\| . \cos\alpha$$

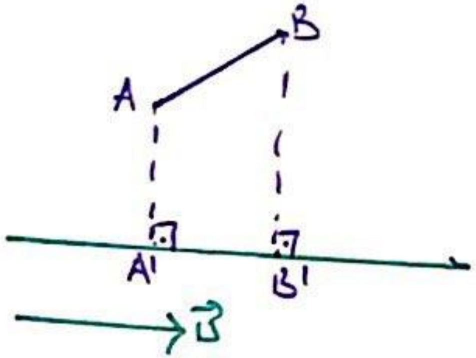
$$= \|\overrightarrow{AB}\| . \|\vec{u}\| . \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{|\langle AB, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|}}$$ olur.

Örnek:

$\vec{AB} = (-3,7)$ vektörünün $\vec{B} = (3,4)$ doğrultusundaki izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.

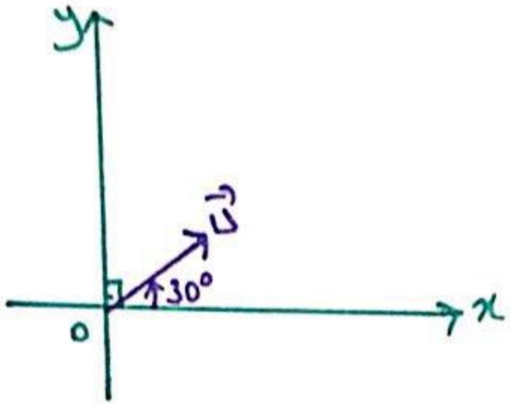
Çözüm:



$$\|\vec{A'B'}\| = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{B} \rangle|}{\|\vec{B}\|}$$

$$= \frac{19}{5} \text{ br}$$

Not:

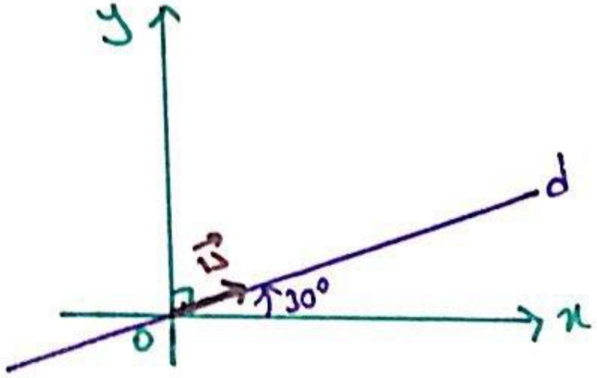


Şekildeki $\vec{u}$ vektörü için $\|\vec{u}\| = 1$ ise

$\vec{u} = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olur.

Örnek: $\vec{AB} = (-3,7)$ vektörünün x ekseniyle 30° lik açı yapan d doğrusu üzerindeki izdüşümünün uzunluğunu bulunuz.

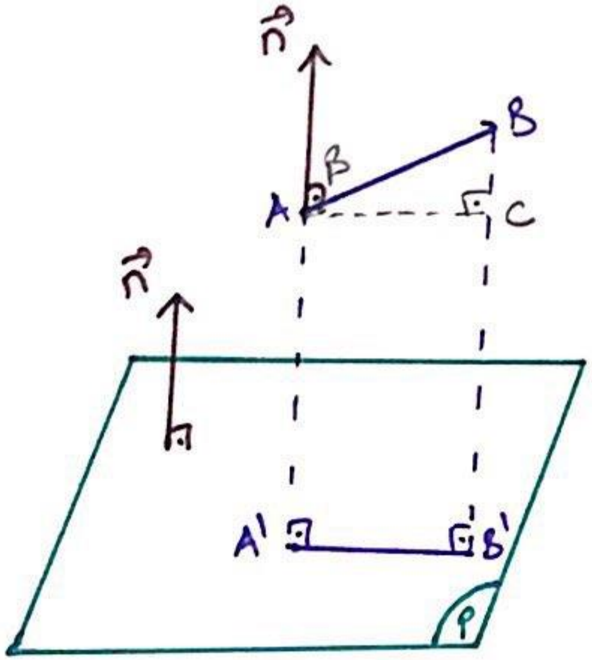
Çözüm:



$\vec{u} = (\cos 30^\circ, \sin 30^\circ) = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ olur.

$$\ell = \frac{|\langle \vec{AB}, \vec{u} \rangle|}{\|\vec{u}\|} = \frac{7-3\sqrt{3}}{2} \text{ br.}$$

BİR DOĞRU PARÇASININ BİR DÜZLEM ÜZERİNDEKİ DİK İZDÜŞÜMÜNÜN UZUNLUĞU



$\|\overrightarrow{A'B'}\| = ?$

$\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AC}\|$ dir.

$\overrightarrow{AB}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı β olsun.

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}\| = \|\overrightarrow{AB}\| . \|\vec{n}\| . \sin\beta$$

$$= \|\overrightarrow{AB}\| . \|\vec{n}\| . \frac{\|\overrightarrow{AC}\|}{\|\overrightarrow{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\|\overrightarrow{A'B'}\| = \|\overrightarrow{AC}\| = \frac{\|\overrightarrow{AB} \wedge \vec{n}\|}{\|\vec{n}\|}} \text{ olur.}$$

Uzayda Simetri

$A(x,y,z)$ noktasının,

orijine göre simetriği $(-x,-y,-z)$

x eksenine göre simetriği $(x,-y,-z)$

y eksenine göre simetriği $(-x,y,-z)$

z eksenine göre simetriği $(-x,-y,z)$

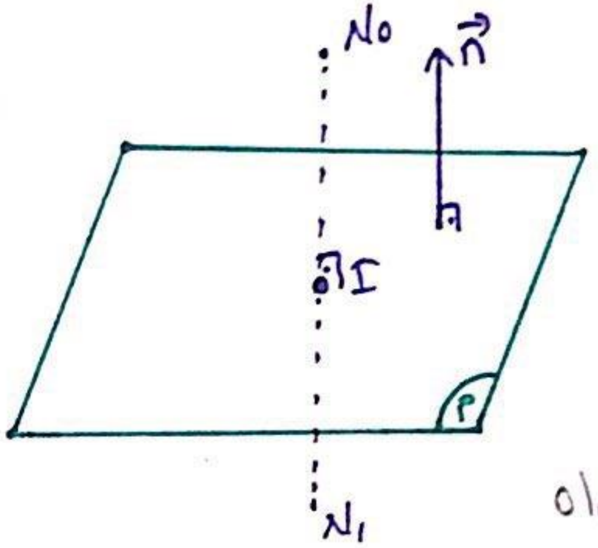
xoy $(z=0)$ düzlemine göre simetriği $(x,y,-z)$

xoz $(y=0)$ düzlemine göre simetriği $(x,-y,z)$

yoz $(x=0)$ düzlemine göre simetriği $(-x,y,z)$ dir.

Bir noktanın herhangi bir düzleme ve herhagi bir doğruya göre simetriğini inceleyelim:

Düzleme Göre Simetri



$N_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının $P \ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemine göre simetriği: $N_1(x_1, y_1, z_1)$ olsun. NN_1 doğru parçasının orta noktası $I\left(\frac{x_1+x_0}{2}, \frac{y_1+y_0}{2}, \frac{z_1+z_0}{2}\right)$

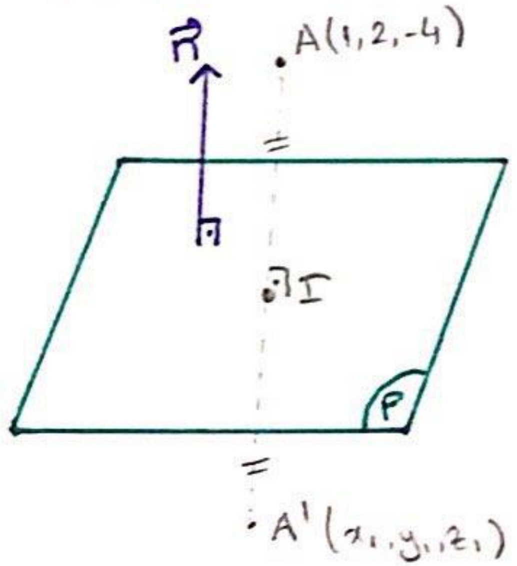
olmak üzere $I \in P \ldots$ (1)

N_0 dan geçen ve doğrultmanı $\vec{n}=(a,b,c)$ olan doğru d olmak üzere $N_1 \in d \ldots$ (2)

(1) ve (2) den N_1 bulunur.

Örnek: $A(1,2,-4)$ noktasının $P\ldots\ x+2y-z+9=0$ düzlemine göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Çözüm:



$I\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2}, \frac{z_1-4}{2}\right)$ olur.

$$I \in P \Rightarrow \frac{x_1+1}{2} + \frac{2(y_1+2)}{2} - \frac{z_1-4}{2} + 9 = 0$$

$$\Rightarrow x_1 + 2y_1 - z_1 + 27 = 0 \ldots ①$$

A dan geçen ve doğrultmanı $\vec{n} = \vec{u} = (1,2,-1)$ olan doğru

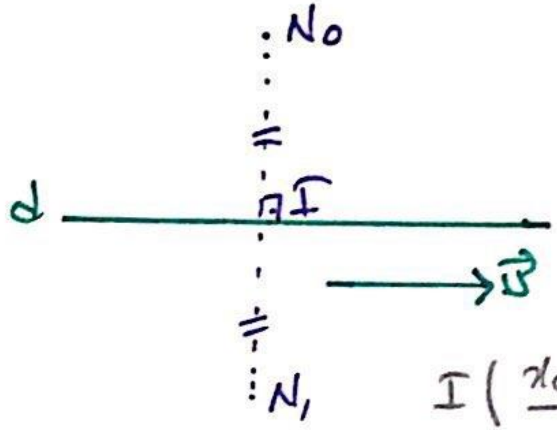
$$d\ldots\ \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z+4}{-1} = \lambda$$

$I \in d \Rightarrow x_1 = \lambda + 1,\ y_1 = 2\lambda + 2,\ z_1 = -\lambda - 4 \ldots ②$

① ve ② den $\lambda = -6$ bulunur.

② den, $x_1 = -5$, $y_1 = -10$, $z_1 = 2$ olup $A'(-5,-10,2)$ olur.

Doğruya Göre Simetri



$N_0(x_0, y_0, z_0)$ noktasının

$$d \ldots \frac{x-p}{a} = \frac{y-q}{b} = \frac{z-r}{c} = \lambda$$

doğrusuna göre simetriği $N_1(x_1, y_1, z_1)$ olsun.

$I\left(\frac{x_0+x_1}{2}, \frac{y_0+y_1}{2}, \frac{z_0+z_1}{2}\right)$ olmak üzere

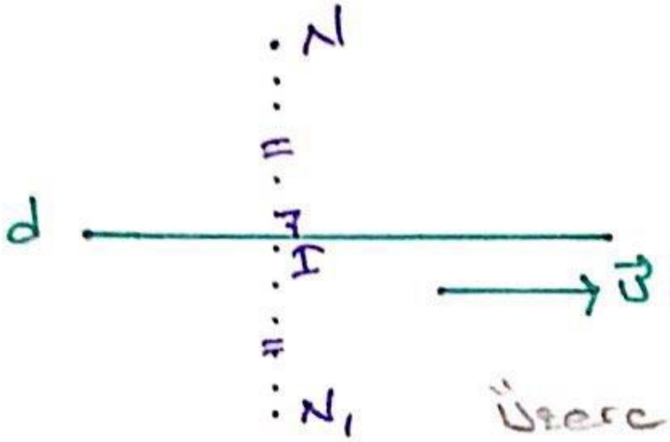
$$I \in d \ldots (1)$$

$$\overrightarrow{N_0N_1} \perp \vec{u} \Rightarrow \langle \overrightarrow{N_0N_1}, \vec{u} \rangle = 0 \ldots (2)$$

(1) ve (2) den N_1 bulunur.

Örnek: $N(1,2,-3)$ noktasının $d \ldots \dfrac{x-1}{2} = \dfrac{y}{2} = \dfrac{z-1}{3} = t$ doğrusuna göre simetriği olan noktayı bulunuz.

Çözüm:



N nin simetriği, $N_1(x_1, y_1, z_1)$ olsun.

I orta noktası için

$$I\left(\frac{x_1+1}{2}, \frac{y_1+2}{2}, \frac{z_1-3}{2}\right) \text{ olur.}$$

$d \ldots x = 2t+1,\ y = 2t,\ z = 3t+1$ olmak üzere $I \in d$ dir.

$$\Rightarrow \frac{x_1+1}{2} = 2t+1,\ \frac{y_1+2}{2} = 2t,\ \frac{z_1-3}{2} = 3t+1$$

$$\Rightarrow x_1 = 4t+1,\ y_1 = 4t-2,\ z_1 = 6t+5 \ldots (1)$$

$\vec{NN_1} = (x_1-1, y_1-2, z_1+3)$, $\vec{u} = (2,2,3)$

$\vec{NN_1} \perp \vec{u} \Rightarrow 2(x_1-1) + 2(y_1-2) + 3(z_1+3) = 0$

$\Rightarrow 2x_1 + 2y_1 + 3z_1 + 3 = 0 \ldots (2)$

(1) ve (2) den $t = -\dfrac{8}{17} \Rightarrow x_1 = \dfrac{1}{17},\ y_1 = -\dfrac{66}{17},\ z_1 = \dfrac{37}{17} \Rightarrow N_1\left(\dfrac{1}{17}, \dfrac{-66}{17}, \dfrac{37}{17}\right)$

Örnek:

$$d \ldots \begin{cases} x = 1 - t \\ y = 2 + 3t \\ z = -t \end{cases}$$ doğrusunun $P \ldots 2x + 2y + z + 4 = 0$ düzlemi

üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

Örnek: $d \ldots (2x-5y+4z-1=0,\ x+y+3z+5=0)$ doğrusunun yoz düzlemi üzerindeki dik izdüşümünü bulunuz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 18