ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13

Karışık Problemler

Örnek: $A(5,5,6)$ noktasından geçen ve $d \ldots\ 3x = y = z = \lambda$ doğrusunu dik olarak kesen doğrunun denklemini bulunuz.

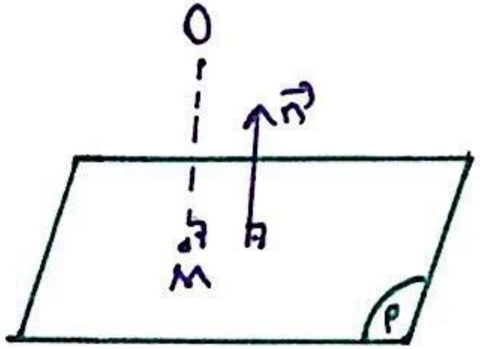
Örnek: A(1,2,3) noktası ve d... $x=y=z=\lambda$ doğrusunun belirttiği düzlemin denklemini bulunuz.

Örnek: $A(1,0,1)$ noktasından geçen, $d \ldots \frac{x-1}{2} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{1} = k$

ve $d_2 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3} = \lambda$ doğrularını kesen doğruyu bulunuz.

Örnek: P... $x+y+z-3=0$ düzlemi üzerinde bir nokta $M(x,y,z)$ olsun. M nin koordinatları ne olmalıdır ki orijinin bu noktaya olan uzaklığı minimum olsun?

Çözüm:



M nin O ya olan uzaklığının minimum olması için $\vec{OM} \parallel \vec{n}$ olmalıdır.

$\vec{n}=(1,1,1)$ olup $\vec{OM}=\lambda\vec{n}$ den

$(x,y,z)=\lambda(1,1,1)$

$$\Rightarrow \frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}=\lambda$$

$\Rightarrow x=\lambda,\ y=\lambda,\ z=\lambda$ bulunur.

$M\in P$ olduğundan $x+y+z=3 \Rightarrow \lambda=1$

$\Rightarrow M(1,1,1)$ olmalıdır.

Örnek: $A(1,1,1)$, $B(0,2,1)$, $C(2,1,2)$ noktalarından aynı uzaklıkta ve $P \ldots x+3y+z=0$ düzlemine ait $K(x,y,z)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:

$$d(A,K)=d(B,K) \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = x^2+(y-2)^2+(z-1)^2$$

$$\Rightarrow x-y+1=0 \ldots (1)$$

$$d(A,K)=d(C,K) \Rightarrow (x-1)^2+(y-1)^2+(z-1)^2 = (x-2)^2+(y-1)^2+(z-2)^2$$

$$\Rightarrow x+z-3=0 \ldots (2)$$

$K \in P$ olduğundan $x+3y+z=0 \ldots (3)$

(1), (2) ve (3) den

$$\begin{cases} x-y+1=0 \\ x+z-3=0 \\ x+3y+z=0 \end{cases}$$

elde edilir. Bu sistem çözülürse $K(-2,-1,5)$ bulunur.

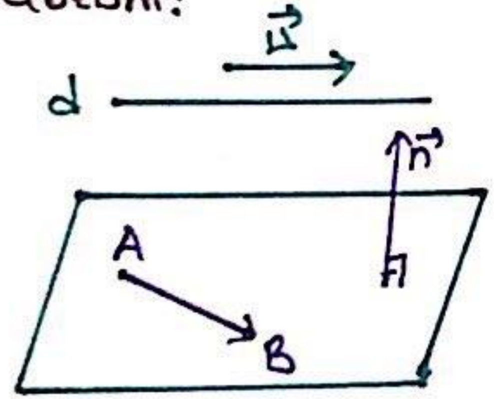
Örnek: Aşağıda verilen doğrudaş olmayan noktalardan geçen düzlemlerin denklemlerini bulunuz.

a) $A(1,2,3)$, $B(1,-1,2)$, $C(-2,2,1)$

b) $A(0,0,0)$, $B(a,b,c)$, $C(a-b,\, b-c,\, c-a)$

Örnek: d... $x-1=\frac{y}{2}=\frac{1-z}{3}=\lambda$ doğrusuna paralel olan ve A(-3,1,1), B(-1,3,1) noktalarından geçen düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:



$\vec{AB}\perp\vec{n}$, $\vec{u}\perp\vec{n}$ $\Rightarrow$ $\vec{n}=\vec{AB}\wedge\vec{u}$ alınabilir.

$\vec{u}=(1,2,-3)$

$$\Rightarrow \vec{n}=\begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-6,6,2)$$

$\Rightarrow$ P... $-6x+6y+2z+d=0$

A∈P olduğundan $18+6+2+d=0 \Rightarrow d=-26$

$\Rightarrow$ P... $6x-6y-2z+26=0$

$\Rightarrow$ P... $3x-3y-z+13=0$ bulunur.

Örnek: $d_1 \ldots\ x = y = z = \lambda$ ve $d_2 \ldots\ x - 1 = \frac{y}{2} = \frac{1-z}{3} = t$

doğrularına paralel olan ve $A(-2,3,4)$ noktasından geçen P düzlemini bulunuz.

Çözüm:

d_1 in doğrultmanı $\vec{u}_1 = (1,1,1)$, d_2 nin doğrultmanı $\vec{u}_2 = (1,2,-3)$ dir.

P nin normali $\vec{n}$ olmak üzere $d_1 // P$ olduğundan $\vec{u}_1 \perp \vec{n}$ ve $d_2 // P$ olduğundan $\vec{u}_2 \perp \vec{n}$ dir.

$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2$ alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (-5, 4, 1)$$

$\Rightarrow P \ldots\ -5x + 4y + z + d = 0$

$A \in P \Rightarrow 10 + 12 + 4 + d = 0 \Rightarrow d = -26$

$\Rightarrow P \ldots\ 5x - 4y - z + 26 = 0$ olur.

Örnek: $d_1 \ldots \frac{x}{2} = y = z-1 = \lambda$ ve $d_2 \ldots x = \frac{y}{2} = z-1 = t$

doğruların birbirlerine göre durumunu inceleyiniz. Eğer bir düzlem belirtiyorlarsa denklemini bulunuz.

Örnek: $A(-1,2,-3)$ noktasından geçen ve $P \ldots 2x-2y-4z-1=0$ ile $Q \ldots 3x+y+6z-4=0$ düzlemlerinin her ikisine birden dik olan düzlemin denklemini bulunuz.

Çözüm:

Aradığımız düzlem R ve normali de $\vec{n}_R$ olsun.

P nin normali: $\vec{n}_P=(2,-2,-4)$, Q nun normali $\vec{n}_Q=(3,1,6)$ dır.

$R \perp P \Rightarrow \vec{n}_R \perp n_P$, $R \perp Q \Rightarrow \vec{n}_R \perp \vec{n}_Q$ olur.

$$\Rightarrow \vec{n}_R=\vec{n}_P \wedge \vec{n}_Q \text{ alınabilir.}$$

$$\Rightarrow \vec{n}_R=\begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 2 & -2 & -4 \\ 3 & 1 & 6 \end{vmatrix}=(-8,-24,8)$$

$$\Rightarrow \vec{n}_R=(1,3,-1) \text{ alınabilir.}$$

$$\Rightarrow P \ldots x+3y-z+d=0$$

$$A \in P \Rightarrow -1+6+3+d=0 \Rightarrow d=-8$$

$$\Rightarrow P \ldots x+3y-z-8=0 \text{ olur.}$$

Örnek: A(7,9,-5) noktasından geçen ve koordinat eksenlerini eşit parçalara ayıran P düzleminin denklemini bulunuz.

Çözüm:

P nin koordinat eksenlerinden ayırdığı parçaların uzunluğu r br olsun. O halde $A(r,0,0), B(0,r,0), C(0,0,r) \in P$ dir.

$$P \ldots \quad ax+by+cz+d=0$$

$$A \in P \Rightarrow ar+d=0 \Rightarrow a=-d/r$$

$$B \in P \Rightarrow br+d=0 \Rightarrow b=-d/r$$

$$C \in P \Rightarrow cr+d=0 \Rightarrow c=-d/r$$

$$\Rightarrow P \ldots \left(-\frac{d}{r}\right)x+\left(-\frac{d}{r}\right)y+\left(-\frac{d}{r}\right)z+d=0$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad x+y+z+r=0$$

$$A \in P \Rightarrow 7+9-5+r=0 \Rightarrow r=-11$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad x+y+z-11=0$$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 13