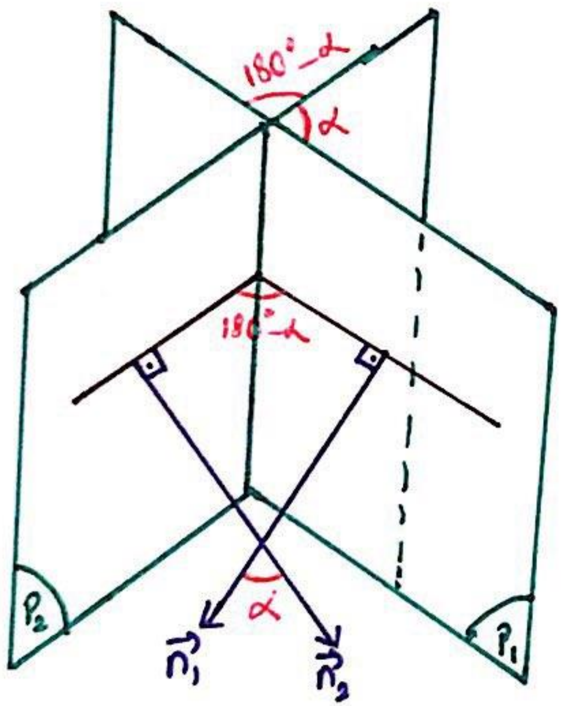
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 12

Kesişen İki Düzlem Arasındaki Açı



Kesişen iki düzlem arasında iki açı oluşur. Bu iki açıdan biri diğerinin bütünleridir. Düzlemler arasındaki açı, düzlemlerin normalleri arasındaki açıya veya bu açının bütünlerine eşittir. Yani normaller arasındaki açı α ise düzlemler arasındaki açı α veya 180°-α dır.

Örnek: $P_1 \ldots\ 2x-y+2z+1=0$ ve $P_2 \ldots\ 2x+y+2z+15=0$

düzlemleri arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{n}_1=(2,-1,2)\ ,\ \vec{n}_2=(2,1,2)$$

P_1 ile P_2 arasındaki açı α ise $\vec{n}_1$ ile $\vec{n}_2$ arasındaki açı da α dır.

$$\Rightarrow \langle \vec{n}_1,\vec{n}_2\rangle = \|\vec{n}_1\|.\|\vec{n}_2\|.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow 7 = 3.3.\cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{7}{9} \quad \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{7}{9}\right) \text{ olur.}$$

Kesişen İki Düzlemin Açıortay Düzlemleri

Kesişen iki düzlemden eşit uzaklıkta olan noktaların kümesine bu iki düzlemin açıortay düzlemi denir.

$P \ldots a_1x+a_2y+a_3z+d_1=0$, $Q \ldots b_1x+b_2y+b_3z+d_2=0$ kesişen düzlemleri verilsin. Açıortay düzlemine ait keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olmak üzere,

$$d(X,P)=d(X,Q)$$

$$\Rightarrow \frac{|a_1x+a_2y+a_3z+d_1|}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\frac{|b_1x+b_2y+b_3z+d_2|}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{a_1x+a_2y+a_3z+d_1}{\sqrt{a_1^2+a_2^2+a_3^2}}=\mp\frac{b_1x+b_2y+b_3z+d_2}{\sqrt{b_1^2+b_2^2+b_3^2}}$$

bulunur.

Örnek: $P \ldots 2x - y + 2z - 5 = 0$ ve $Q \ldots x + 2y - 2z + 1 = 0$ düzlemlerinin açıortay düzlemlerini bulunuz.

Çözüm:

Açıortay düzlemine ait keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.

$$\Rightarrow d(X,P) = d(X,Q)$$

$$\Rightarrow \frac{|2x - y + 2z - 5|}{\sqrt{9}} = \frac{|x + 2y - 2z + 1|}{\sqrt{9}}$$

$$\Rightarrow 2x - y + 2z - 5 = \mp (x + 2y - 2z + 1)$$

$\Rightarrow x - 3y + 4z - 6 = 0$ ve $3x + y - 4 = 0$ bulunur.

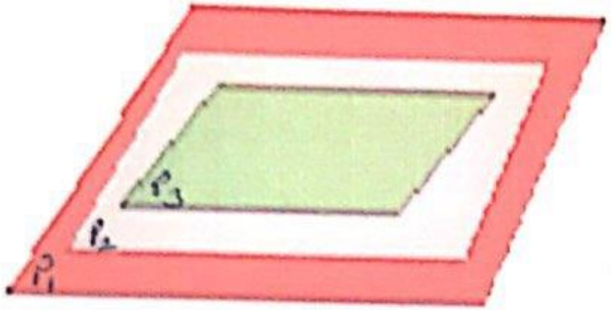
Üç Düzlemin Birbirine Göre Durumu

$$P_1 \ldots \; a_1x + a_2y + a_3z + d_1 = 0$$
$$P_2 \ldots \; b_1x + b_2y + b_3z + d_2 = 0$$
$$P_3 \ldots \; c_1x + c_2y + c_3z + d_3 = 0$$

düzlemleri verilsin. Bu düzlemlerin normalleri

$$\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$$
$$\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$$
$$\vec{n}_3 = (c_1, c_2, c_3) \quad \text{dir.}$$

1) P_1, P_2, P_3 Çakışıktır



Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca,

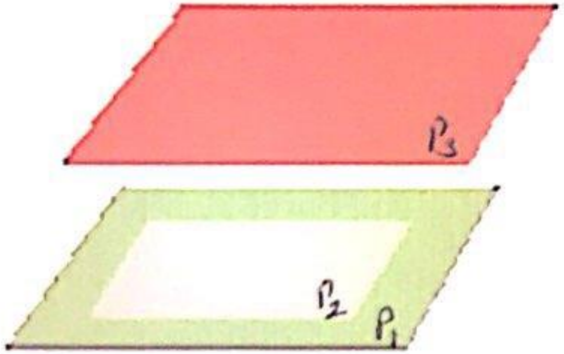
$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} = \frac{d_1}{d_3}}$$ dır.

2) İkisi Çakışık, Üçüncüsü Bunlara Paraleldir

P_1 ve P_2 çakışık, P_3 bunlara paralel olsun.

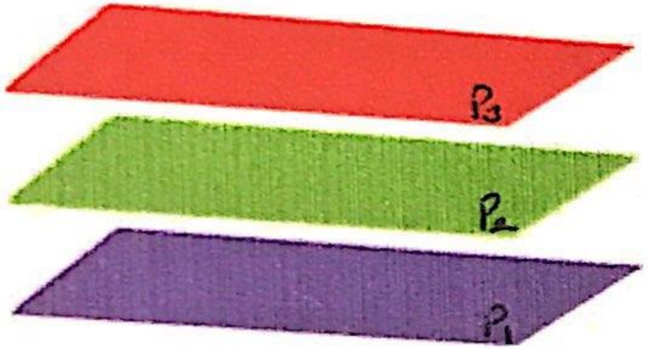
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca,



$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}}$$ dır.

3) P_1, P_2, P_3 Paraleldir



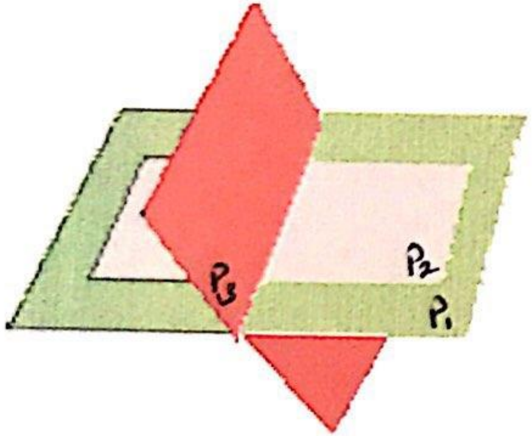
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \parallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}} \; ,$$

$$\boxed{\frac{b_1}{c_1} = \frac{b_2}{c_2} = \frac{b_3}{c_3} \neq \frac{d_2}{d_3}} \; ,$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} = \frac{a_2}{c_2} = \frac{a_3}{c_3} \neq \frac{d_1}{d_3}} \; \text{dir.}$$

4) Herhangi ikisi Çakışık, Diğeri Bunları Keser



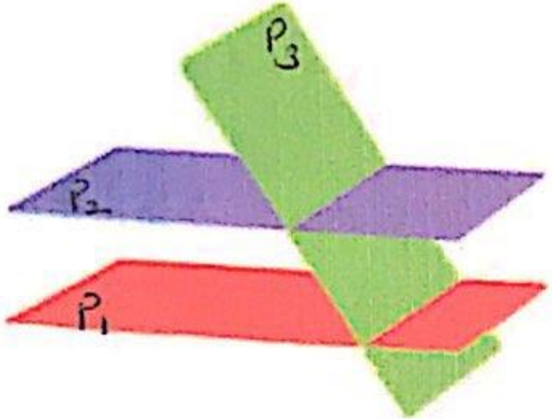
P_1 ve P_2 çakışık olsun. P_3, bunları kessin.

Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}} \; ,$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} \neq \frac{a_2}{c_2} \text{ veya } \frac{a_2}{c_2} \neq \frac{a_3}{c_3}} \; \text{dir.}$$

5) Herhangi ikisi Paralel, Diğeri Bunları Keser



P_1 ile P_2 paralel olsun. P_3 bunları kessin.

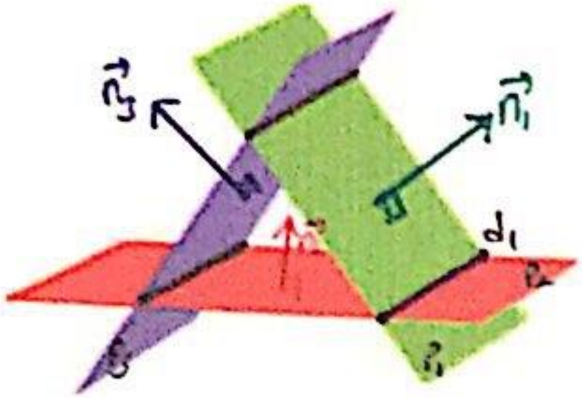
Bu durumda $\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur. Ayrıca;

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}}$$

$$\boxed{\frac{a_1}{c_1} \neq \frac{a_2}{c_2} \text{ veya } \frac{a_2}{c_2} \neq \frac{a_3}{c_3}}$$ dir.

Not: Düzlem denklemleri verildiğinde bu ilk 5 durum kolaylıkla tespit edilebilir.

6) İkişer İkişer Arakesitleri Paraleldir



Bu durumda $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2 \nparallel \vec{n}_3$ olur.

$P_1 \cap P_2 = \{d_1\}$ ve d_1 in doğrultmanı $\vec{u}$ olsun.

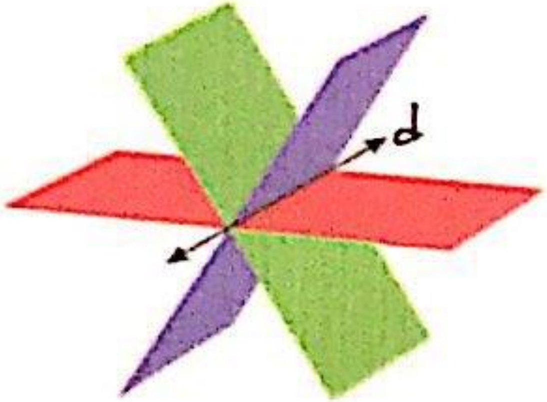
$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 \perp P_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp d \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u}_1 \\ \vec{n}_2 \perp P_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp d \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u}_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u}_1 = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ dir.

$\vec{u}_1 \perp \vec{n}_3$ olduğundan $\langle \vec{u}_1, \vec{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \langle \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \boxed{\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0}$

Ayrıca $\boxed{A \in P_1 \cap P_2 \text{ için } A \notin P_3}$ olur.

7) Üçü Bir Doğru Boyunca Kesişir



$P_1 \cap P_2 \cap P_3 = \{d\}$ ve d nin doğrultmanı $\vec{u}$ olsun.

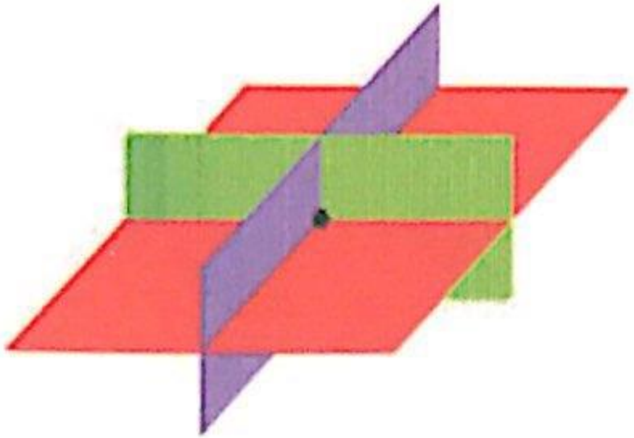
$\left.\begin{array}{l} \vec{n}_1 \perp P_1 \Rightarrow \vec{n}_1 \perp d \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u} \\ \vec{n}_2 \perp P_2 \Rightarrow \vec{n}_2 \perp d \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u} \end{array}\right\} \Rightarrow \vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ dir.

$\vec{n}_3 \perp P_3 \Rightarrow \vec{n}_3 \perp d \Rightarrow \vec{n}_3 \perp \vec{u} \Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{n}_3 \rangle = 0$

$\Rightarrow \langle \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2, \vec{n}_3 \rangle = 0 \Rightarrow \boxed{\det(\vec{n}_1, \vec{n}_2, \vec{n}_3) = 0}$

Ayrıca $\boxed{A \in P_1 \cap P_2 \text{ için } A \in P_3}$ olur.

8) Üçü Bir Noktada Kesişir



Bu durumda,

$$\begin{cases} a_1x+a_2y+a_3z+d_1=0 \\ b_1x+b_2y+b_3z+d_2=0 \\ c_1x+c_2y+c_3z+d_3=0 \end{cases}$$

sisteminin tek çözümü vardır. Sistem Cramer sistemi olup katsayılar matrisinin determinantı sıfırdan farklıdır. Yani,

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \boxed{\det(\vec{n}_1,\vec{n}_2,\vec{n}_3)\neq 0} \text{ olur.}$$

Örnek:

$P_1 \ldots \quad x-y+2z-1=0$

$P_2 \ldots \quad x-y-2z-1=0$

$P_3 \ldots \quad x-y+2z+1=0$

düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

P_1 ve P_3 paraleldir. P_2 bunları keser.

Örnek:

$P_1 \ldots \quad x+3y-z-1=0$

$P_2 \ldots \quad 2x+6y-2z+2=0$

$P_3 \ldots \quad x+3y-z+1=0$

düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

P_2 ve P_3 çakışık, P_1 bunlara paraleldir.

Örnek: $\begin{cases} P_1 \ldots \; 2x - y + z + 1 = 0 \\ P_2 \ldots \; 3x + 5y - z + 4 = 0 \\ P_3 \ldots \; x + 6y - 2z + 1 = 0 \end{cases}$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm: ilk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

$$\det(\vec{n_1}, \vec{n_2}, \vec{n_3}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 3 & 5 & -1 \\ 1 & 6 & -2 \end{vmatrix} = 2.(-4) + 1.(-5) + 1.13 = 0$$

O halde ya ikizer ikizer arakesitleri paraleldir ya da üçü bir doğru boyunca kesişir.

$A \in P_1 \cap P_2$ alalım. $x = 0$ için $y = -\frac{5}{4}$, $z = -9/4 \Rightarrow A(0, -\frac{5}{4}, -\frac{9}{4})$

$A \overset{?}{\in} P_3$. $\quad 0 + 6(-\frac{5}{4}) - 2(-\frac{9}{4}) + 1 = -2 \neq 0$

$\Rightarrow A \notin P_3$ olup ikizer ikizer arakesitleri paraleldir.

Örnek: $P_1 \ldots 2x-y+z+1=0$

$P_2 \ldots x+6y-2z+1=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu

$P_3 \ldots x+19y-7z+2=0$ inceleyiniz.

Çözüm: İlk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

$$\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 6 & -2 \\ 1 & 19 & -7 \end{vmatrix} = 2.(-4)+1.(-5)+1.13=0$$

O halde ya ikişer ikişer arakesitleri paraleldir ya da üçü bir doğru boyunca kesişir.

$A \in P_1 \cap P_2$ alalım. $y=0$ için $A(-\frac{3}{5},0,\frac{1}{5})$ olur.

$A \overset{?}{\in} P_3$. $-\frac{3}{5}-\frac{7}{5}+2=-2+2=0$

$\Rightarrow A \in P_3$ olup üçü bir doğru boyunca kesişir.

Örnek:
$P_1 \ldots \; x-2y+z-14=0$
$P_2 \ldots \; 3x-5y+3z-40=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu
$P_3 \ldots \; x+y+2z-11=0$ inceleyiniz.

Çözüm:

İlk 5 durumun olmadığı açıktır. Diğer durumları inceleyelim:

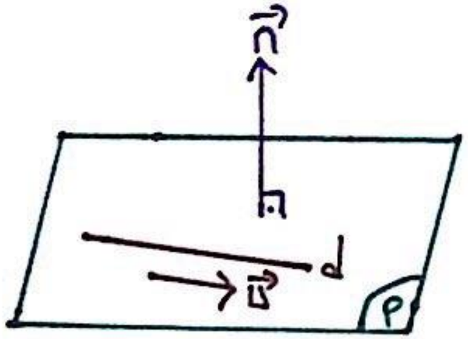
$$\det(\vec{n_1},\vec{n_2},\vec{n_3}) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -5 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 1.(-13)+2.3+1.8 = 1 \neq 0$$

O halde üçü bir noktada kesişir.

Bir Doğru ile Bir Düzlemin Birbirine Göre Durumu

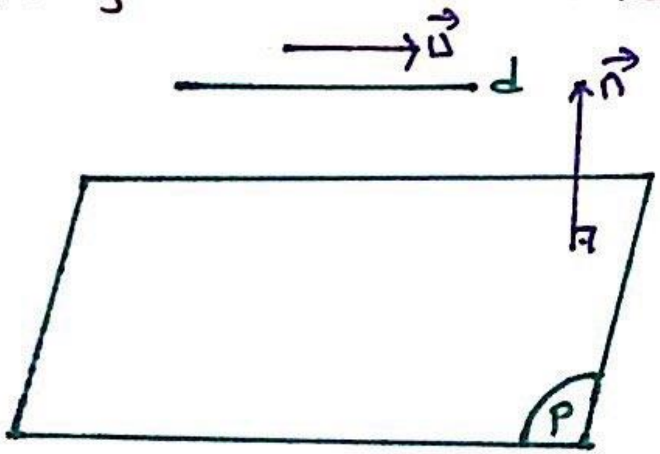
Doğrultmanı $\vec{u}$ olan bir d doğrusu ve normali $\vec{n}$ olan bir P düzlemi verilsin. d ve P için üç durum sözkonusudur;

1) Doğru Düzlemin İçindedir ($d \subset P$)



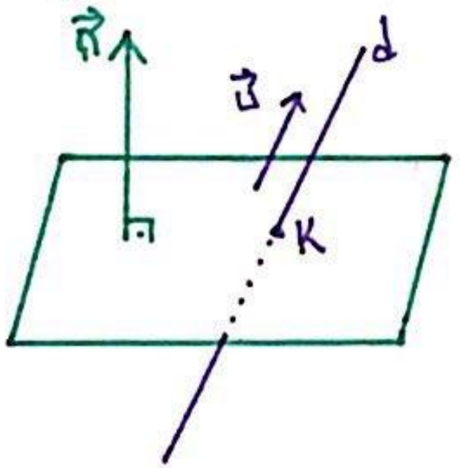
Bu durumda $\vec{n} \perp \vec{u}$ olur. Ayrıca, $A \in d$ için $A \in P$ dir.

2) Doğru Düzleme Paraleldir ($d \parallel P$)



Bu durumda $\vec{n} \perp \vec{u}$ olur. Ayrıca, $A \in d$ için $A \notin P$ dir.

3) Doğru Düzlemi Bir Noktada Keser ($d \cap P = \{K\}$)



Bu durumda $\vec{u} \not\perp \vec{n}$ dir.

Örnek:

$$d \ldots \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3-2t \end{cases}$$ doğrusu ile $P \ldots x+y-z+3=0$ düzleminin

birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u} = (1,-1,-2)$, $\vec{n} = (1,1,-1)$ olup $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 2 \neq 0$ dır.

O halde doğru düzlemi bir noktada keser.

Örnek: $d \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{0} = \frac{z+1}{9} = k$ doğrusu ile $P \ldots 3x+3y-z-1=0$ düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u}=(3,0,9)$, $\vec{n}=(3,3,-1)$ olup $\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = 0$ olduğundan doğru düzlemin içindedir ya da düzleme paraleldir.

$k=0$ için $A(1,-2,-1) \in d$ alalım. $A \overset{?}{\in} P$

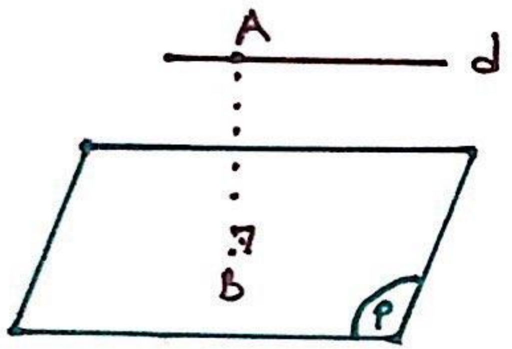
$$3.1+3.(-2)+1-1=-3 \neq 0$$

$\Rightarrow A \notin P$ olup doğru düzleme paraleldir.

Örnek: $d \ldots \dfrac{x-5}{2} = \dfrac{y+1}{-3} = \dfrac{z}{20} = t$ doğrusu ile $P \ldots 10x - 20y + 4z - 70 = 0$

düzleminin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Not: Doğru düzleme paralel ise aralarındaki uzaklığı bulmak için doğru üzerinden bir nokta alınıp bu noktanın düzleme olan uzaklığı bulunur.



Örnek: $d \ldots \frac{x+1}{15} = \frac{y}{2} = \frac{z}{-6} = \lambda$ doğrusunun $P \ldots 3y+z+21=0$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz. $\left(\frac{21}{\sqrt{10}}\right)$

Not: Doğru düzlemi bir noktada kesiyorsa arakesit noktası şu şekilde bulunur:

$$d \cap P = \{K\} \quad , \quad K = (x_0, y_0, z_0) \text{ olsun.}$$

$K \in d$ ve $K \in P$ olmasından hareketle x_0, y_0 ve z_0 bulunur.

Örnek: $d \ldots \frac{x-2}{3} = \frac{y+5}{4} = \frac{z}{1} = \lambda$ doğrusu ile $P \ldots 2x+y-z-2=0$

düzleminin arakesit noktasını bulunuz.

Çözüm:

$d \cap P = \{K\}$ ve $K=(x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in d$ olduğundan $x_0 = 3\lambda+2$, $y_0 = 4\lambda-5$, $z_0=\lambda$ olur.

$K \in P$ olduğundan $2x_0+y_0-z_0-2=0$

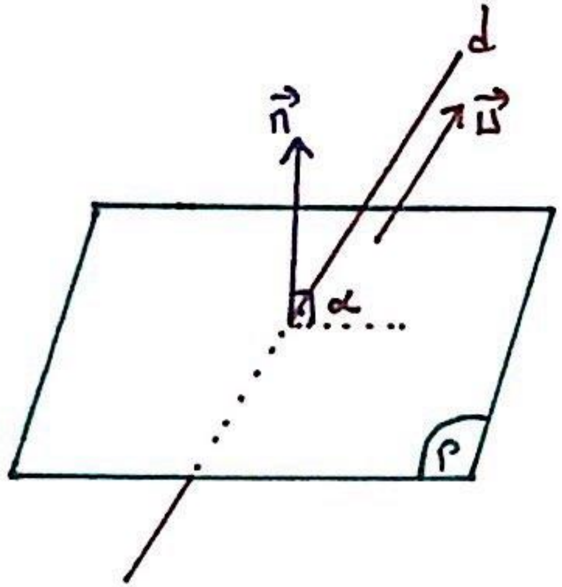
$$\Rightarrow 6\lambda+4+4\lambda-5-\lambda-2=0$$

$$\Rightarrow 9\lambda = 3 \Rightarrow \lambda = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow x_0 = 3\lambda+2 = 3, \quad y_0 = 4\lambda-5 = -\frac{11}{3}, \quad z_0 = \lambda = \frac{1}{3}$$

$\Rightarrow K\left(3, -\frac{11}{3}, \frac{1}{3}\right)$ bulunur.

Doğru Düzlemi Kesiyorsa Aralarındaki Açının Bulunması



d ile P arasındaki açı α ise

$\vec{n}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dır.

Örnek: $d \ldots \begin{cases} x = 1+t \\ y = 2-t \\ z = 3t \end{cases}$ doğrusu ile $P \ldots\ 2x+y+z-5=0$ düzlemi

arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u} = (1,-1,3)$, $\vec{n} = (2,1,1)$ olup P ile d arasındaki açı

α olsun. O halde $\vec{u}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı $\frac{\pi}{2} - \alpha$ dır.

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle = \|\vec{u}\|\,\|\vec{v}\| \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$$

$$\Rightarrow \quad 4 = \sqrt{11}\,\sqrt{6}\,\sin\alpha$$

$$\Rightarrow \sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{66}}$$

$$\Rightarrow \alpha = \arcsin\left(\frac{4}{\sqrt{66}}\right)$$ bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 12