ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

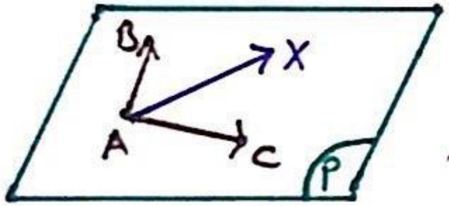
Ders 11

UZAYDA DÜZLEM

Düzlem denilince üzerinde hiçbir girintisi veya çıkıntısı olmayan, sonsuza kadar uzanan ve derinliği bulunmayan bir satıh kastedilir. Şimdi çeşitli elemanları verilen düzlem denkleminin nasıl bulunacağını inceleyelim:

Doğrudaş Olmayan Üç Noktadan Geçen Düzlem Denklemi

Geometri aksiyomlarına göre doğrudaş olmayan yani aynı doğru üzerinde bulunmayan üç nokta bir düzlem belirtir. $A(x_1, y_1, z_1)$, $B(x_2, y_2, z_2)$ ve $C(x_3, y_3, z_3)$ doğrudaş olmayan üç nokta olsun. Bu üç noktadan geçen düzleme P diyelim.



$\vec{AB} \wedge \vec{AC} = \vec{n}$ alınırsa

$\vec{n} \perp \vec{AB}$ ve $\vec{n} \perp \vec{AC}$ olup $\vec{n} \perp P$ dir.

Düzlem üzerinde keyfi bir nokta $X(x, y, z)$ olsun. $\vec{n} \perp P$ olduğundan $\vec{n} \perp \vec{AX}$ dir. Yani $\langle \vec{n}, \vec{AX} \rangle = 0$ dır.

$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = (a, b, c)$, $\vec{AX} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ olmak üzere,

$$\langle \vec{n}, \vec{AX} \rangle = a(x - x_1) + b(y - y_1) + c(z - z_1) = 0$$

$$\Rightarrow ax + by + cz \underbrace{- ax_1 - by_1 - cz_1}_{d} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{ax + by + cz + d = 0}$$ P nin denklemidir.

Sonuç: a, b ve c katsayılarının üçü birden sıfır olmamak şartıyla $ax+by+cz+d=0$ denklemi uzayda düzlem belirtir. Düzleme dik olan $\vec{n}=(a,b,c)$ vektörüne de düzlemin normali adı verilir.

Örnek:

$2x+y-z+1=0$, normali $\vec{n}=(2,1,-1)$ olan düzlemdir.

$x+z-1=0$, normali $\vec{n}=(1,0,1)$ olan düzlemdir.

$y-2=0$, normali $\vec{n}=(0,1,0)$ olan düzlemdir.

Örnek:

$x=0$ denklemi 1-boyutlu uzayda ($\mathbb{R}$) nokta, 2-boyutlu uzayda ($\mathbb{R}^2$) doğru ve 3-boyutlu uzayda da ($\mathbb{R}^3$) düzlem belirtir.

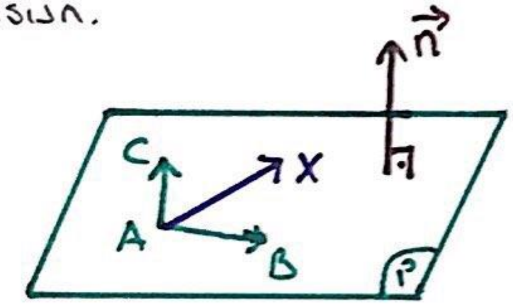
Örnek:

$2x+y-1=0$ denklemi $\mathbb{R}^2$ de bir doğru, $\mathbb{R}^3$ de ise düzlem belirtir.

Örnek: $A(1,-1,2)$, $B(2,0,1)$, $C(3,1,1)$ noktalarından geçen düzlemin denklemini yazınız.

Çözüm:

Aradığımız düzleme P diyelim. P de keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$\vec{AB}=(1,1,-1)$, $\vec{AC}=(2,2,-1)$

$$\vec{n}=\vec{AB}\wedge\vec{AC}=\begin{vmatrix}\vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3}\\ 1 & 1 & -1\\ 2 & 2 & -1\end{vmatrix}=(1,-1,0)$$

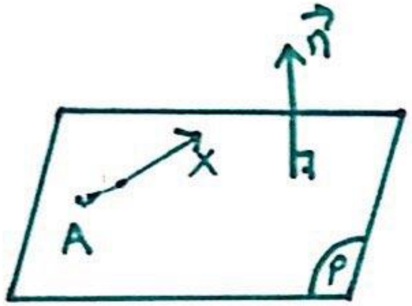
$\vec{AX}\perp\vec{n} \Rightarrow \langle\vec{AX},\vec{n}\rangle=0$

$AX=(x-1,\ y+1,\ z-2)$, $\vec{n}=(1,-1,0)$

$\Rightarrow x-1+(-1)(y+1)=0$

$\Rightarrow x-y-2=0$

Bir Noktası ve Normali Verilen Düzlem Denklemi



$A(x_1,y_1,z_1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n}=(a,b,c)$ olan düzlemin denklemini bulalım: Düzlem üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun. $\vec{n} \perp P \Rightarrow \vec{n} \perp \vec{AX} \Rightarrow \langle \vec{AX}, \vec{n} \rangle = 0$ dır.

$$\vec{AX}=(x-x_1,\, y-y_1,\, z-z_1) \quad , \quad \vec{n}=(a,b,c)$$

$$\Rightarrow a(x-x_1)+b(y-y_1)+c(z-z_1)=0$$

$$\Rightarrow ax+by+cz \underbrace{-ax_1-by_1-cz_1}_{d}=0$$

$$\Rightarrow ax+by+cz+d=0$$

Veya; $\vec{n}=(a,b,c)$ olduğundan

$P \ldots\ ax+by+cz+d=0$ şeklindedir.

$A \in P$ olduğu kullanılarak d bulunur.

Örnek: $A(1,-1,1)$ noktasından geçen ve normali $\vec{n}=(2,3,2)$ olan düzlemin denklemini bulunuz.

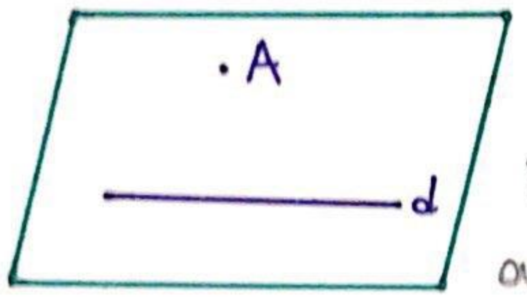
Çözüm:

$P \ldots 2x+3y+2z+d=0$ şeklindedir.

$A \in P \Rightarrow 2-3+2+d=0 \Rightarrow d=-1$

$\Rightarrow P \ldots 2x+3y+2z-1=0$ bulunur.

Bir Doğru ve Bu Doğrunun Dışındaki Bir Noktadan Geçen Düzlem Denklemi



Bir d doğrusu ve bu doğrunun dışındaki A noktasından geçen düzlemin denklemini bulmak için doğru üzerinde B ve C noktaları alınır ve doğrudaş olmayan A, B ve C noktalarından geçen düzlemin denklemi bulunur.

Örnek:

$$d \ldots \begin{cases} x = 1+2t \\ y = 3t \\ z = 3t \end{cases}$$ ve $A(1,0,2)$ noktasının belirttiği düzlemin

denklemini bulunuz.

Çözüm:

$t=0$ için $B(1,0,0) \in d$, $t=1$ için $C(3,3,3) \in d$ alalım.

$\vec{AB} = (0,0,-2)$, $\vec{AC} = (2,3,1)$ olur.

$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 0 & -2 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix} = (6,-4,0)$$

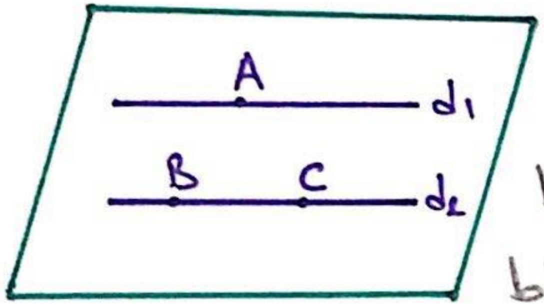
$$\Rightarrow P \ldots \quad 6x - 4y + d = 0$$

$$A \in P \Rightarrow \quad 6 + d = 0 \Rightarrow d = -6$$

$$\Rightarrow 6x - 4y - 6 = 0$$

$$\Rightarrow 3x - 2y - 3 = 0$$

Paralel İki Doğrunun Belirttiği Düzlem



$d_1 \parallel d_2$ olmak üzere d_1 ve d_2 doğrularının belirttiği düzlemin denklemi bulunurken doğruların birinden bir nokta ve diğerinden de iki nokta alınıp doğrudaş olmayan üç noktadan geçen düzlemin denklemi bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \begin{cases} x = 1+3\lambda \\ y = -2+\lambda \\ z = 1+2\lambda \end{cases}$$ doğrularının

paralel olduğunu gösteriniz. Belirttikleri düzlemi bulunuz.

Çözüm:

$t=0$ için $A(2,1,0) \in d_1$, $t=1$ için $B(5,2,2) \in d_1$ ve $\lambda=0$ için $C(1,-2,1) \in d_2$ noktalarını alalım.

$$\Rightarrow \vec{AB} = (3,1,2), \quad \vec{AC} = (-1,-3,1) \text{ olur.}$$

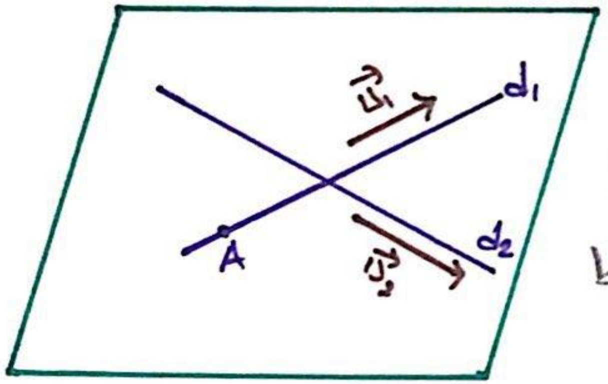
$$\vec{n} = \vec{AB} \wedge \vec{AC} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 3 & 1 & 2 \\ -1 & -3 & 1 \end{vmatrix} = (7,-5,-8)$$

$$\Rightarrow P \ldots \ 7x-5y-8z+d=0$$

$$A \in P \Rightarrow 14-5+d=0 \Rightarrow d=-9$$

$$\Rightarrow P \ldots \ 7x-5y-8z-9=0$$

Kesişen İki Doğrunun Belirttiği Düzlem



$\vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \vec{n}$ olarak alınabilir. Doğruların birinden bir nokta alınıp noktası ve normali bilinen düzlem denklemi bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+3t \\ y = 1+t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \begin{cases} x = -4+\lambda \\ y = -1+2\lambda \\ z = -4+\lambda \end{cases}$$ doğrularının bir noktada

kesiştiğini gösteriniz. d_1 ve d_2 nin belirttiği düzlemi bulunuz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (3,1,2)$, $\vec{u}_2 = (1,2,1)$

$$\Rightarrow \vec{n} = \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2 = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (-3,-1,5)$$

$$\Rightarrow P \ldots \quad -3x - y + 5z + d = 0$$

$t=0$ için $A(2,1,0) \in d_1$

$$A \in P \Rightarrow -6-1+d=0 \Rightarrow d=7$$

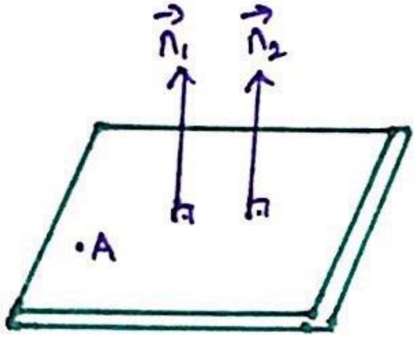
$$P \ldots \quad 3x+y-5z-7=0$$

İki Düzlemin Birbirine Göre Durumu

$P \ldots a_1x + a_2y + a_3z + d_1$ ve $Q \ldots b_1x + b_2y + b_3z + d_2 = 0$

düzlemleri verilsin. P nin normali $\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, Q nun normali $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ olur.

1) P ve Q Çakışıktır $(P = Q)$



$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ dir. $\vec{n}_1 = \lambda \vec{n}_2$

$$\Rightarrow (a_1, a_2, a_3) = \lambda(b_1, b_2, b_3) \Rightarrow \lambda = \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3}$$

olur. Ayrıca $A(x_1, y_1, z_1) \in P$ için $A \in Q$ dur.

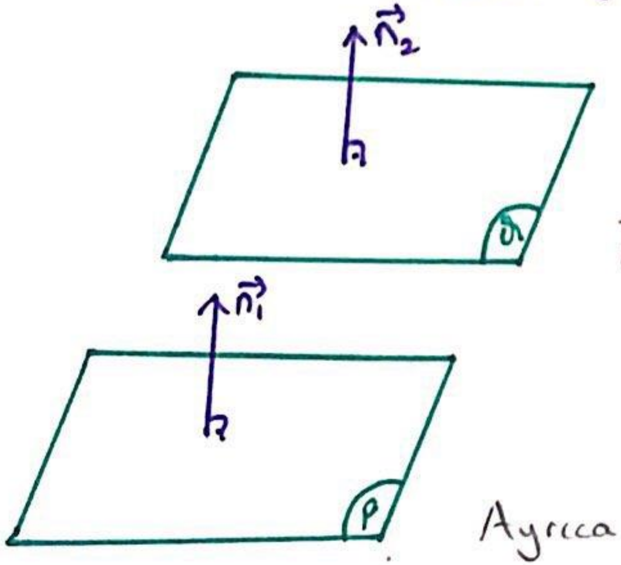
$$A \in P \Rightarrow a_1x_1 + a_2y_1 + a_3z_1 + d_1 = 0 \Rightarrow \lambda b_1x_1 + \lambda b_2y_1 + \lambda b_3z_1 + d_1 = 0$$

$$A \in Q \Rightarrow b_1x_1 + b_2y_1 + b_3z_1 + d_2 = 0$$

$$\Rightarrow d_1 = \lambda d_2 \Rightarrow \lambda = \frac{d_1}{d_2}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \frac{d_1}{d_2}}$$ olur.

2) P ve Q Paraleldir $(P \parallel Q)$



$\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$ ve $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ için

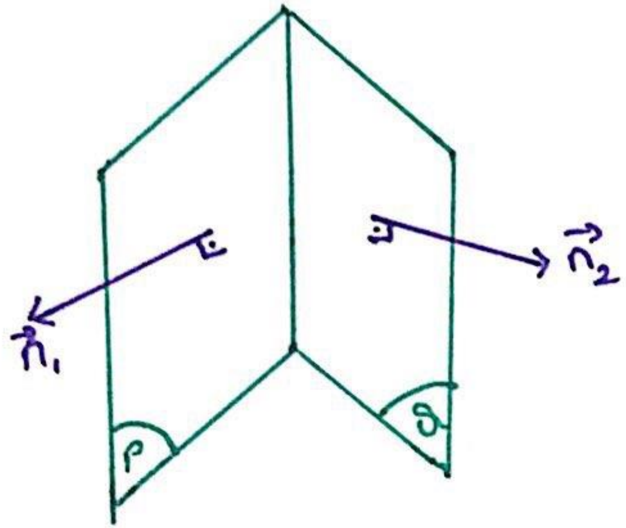
$\vec{n}_1 \parallel \vec{n}_2$ dir.

$$\Rightarrow \frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \quad \text{olur.}$$

Ayrıca $A \in P$ için $A \notin Q$ dur.

$$\Rightarrow \boxed{\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} \neq \frac{d_1}{d_2}}$$

3) P ve Q Bir Doğru Boyunca Kesişir ($P \cap Q = \{d\}$)



$\vec{n}_1 = (a_1, a_2, a_3)$, $\vec{n}_2 = (b_1, b_2, b_3)$ için $\vec{n}_1 \nparallel \vec{n}_2$ dir.

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{a_1}{b_1} \neq \dfrac{a_2}{b_2}}$ veya $\boxed{\dfrac{a_2}{b_2} \neq \dfrac{a_3}{b_3}}$ olur.

Örnek: $x+2y-z+1=0$ ve $3x+6y-3z+3=0$ düzlemlerinin birbirine göre durumunu inceleyiniz.

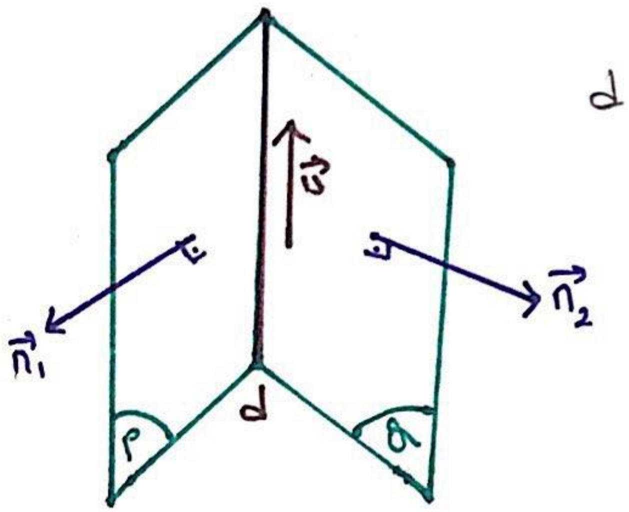
Çözüm:

$$\frac{1}{3}=\frac{2}{6}=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$ olup düzlemler çakışıktır.

Örnek: $x+y-z-1=0$ ve $x+y+z-1=0$ düzlemleri bir doğru boyunca kesişirler. Çünkü,

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{1}\neq\frac{1}{-1}$$ dir

Bir Doğru Boyunca Kesişen İki Düzlemin Arakesit Doğrusunun Bulunması



$P \cap Q = \{d\}$ olsun.

d ... $(P=0,\ Q=0)$ şeklinde gösterilir.

d doğrusu aşağıdaki şekilde bulunabilir:

1) $\vec{n}_1 \perp P \Rightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{u}$, $\vec{n}_2 \perp Q \Rightarrow \vec{n}_2 \perp \vec{u}$

O halde $\vec{u} = \vec{n}_1 \wedge \vec{n}_2$ alınabilir.

P ve Q nun denklemlerinin ortak çözümüne ait bir nokta bulunup noktası ve doğrultmanı bilinen doğru denkleminden d bulunur.

2) P ve Q nun denklemleri ortak çözülür. İki denklem üç bilinmeyen olduğundan bir parametreye bağlı çözüm bulunur. Bu ise d nin denklemidir.

3) P ve Q nun denklemlerinin ortak çözümüne ait iki nokta bulunup iki noktası bilinen doğru denkleminden d bulunur.

Örnek: d… $(x-2y+z=0,\ 2x+y+z-3=0)$ doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$\vec{n}_1=(1,-2,1)$, $\vec{n}_2=(2,1,1)$ olup $\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix}\vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3\\ 1 & -2 & 1\\ 2 & 1 & 1\end{vmatrix}=(-3,1,5)$

olup $\vec{B}=(-3,1,5)$ alınabilir. Düzlem denklemlerinin arakesitine ait bir nokta bulalım: $y=0$ için $\begin{cases}x+z=0\\ 2x+z=3\end{cases} \Rightarrow x=3,\ z=-3$

$\Rightarrow A(3,0,-3)\in d$, $\vec{B}=(-3,1,5)$

$$\Rightarrow d\ldots\ \frac{x-3}{-3}=\frac{y}{1}=\frac{z+3}{5}=\lambda$$

$$\Rightarrow d\ldots\begin{cases}x=3-3\lambda\\ y=\lambda\\ z=-3+5\lambda\end{cases}$$ bulunur.

2.yol :

Düzlem denklemlerini ortak çözelim:

$$\begin{cases} x-2y+z=0 \\ 2x+y+z-3=0 \end{cases}$$

$x=t$ alınırsa,

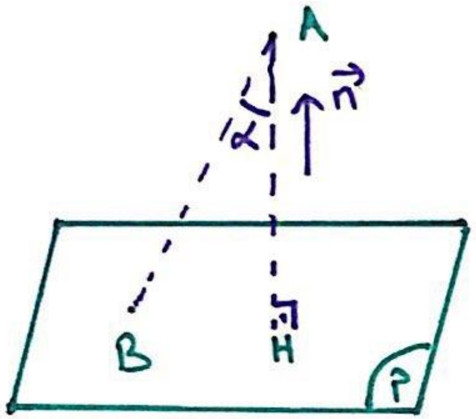
$$\begin{array}{l} \begin{cases} 2y-z=t \\ y+z=3-2t \end{cases} \\ \hline \end{array}$$

$\Rightarrow \; 3y=3-t$

$\Rightarrow \; y=1-\frac{t}{3}\,, \quad z=2-\frac{5t}{3}$

$$\Rightarrow d \dots \begin{cases} x=t \\ y=1-\frac{t}{3} \\ z=2-\frac{5}{3}t \end{cases}$$ bulunur.

Bir Noktanın Bir Düzleme Uzaklığı



$A(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $P\ldots ax+by+cz+d=0$ düzlemine olan uzaklığını bulalım: Bir $B=(x_1,y_1,z_1)\in P$ alalım. $\vec{AB}$ ile $\vec{n}$ arasındaki açı α olsun.

$$\langle \vec{AB},\vec{n}\rangle = \|\vec{AB}\|.\|\vec{n}\|.\cos\alpha$$

$$= \|\vec{AB}\|.\|\vec{n}\|.\frac{\|\vec{AH}\|}{\|\vec{AB}\|}$$

$$\Rightarrow \|\vec{AH}\| = \ell = \frac{|\langle \vec{AB},\vec{n}\rangle|}{\|\vec{n}\|} \text{ olur.}$$

$\vec{AB}=(x_1-x_0,y_1-y_0,z_1-z_0)$, $\vec{n}=(a,b,c)$

$$\Rightarrow \langle \vec{AB},\vec{n}\rangle = a(x_1-x_0)+b(y_1-y_0)+c(z_1-z_0)$$

$$= \underbrace{ax_1+by_1+cz_1}_{-d\ (B\in P)}-ax_0-by_0-cz_0$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}}$$

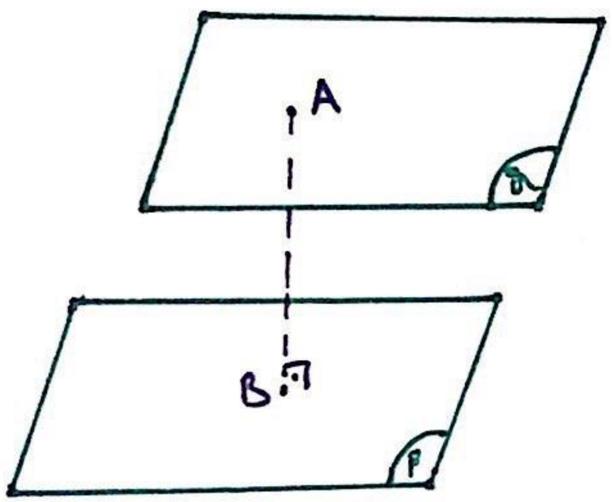
Örnek: $A(2,-1,3)$ noktasının $2x+y-2z+10=0$ düzlemine olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$l = \frac{|2.2+(-1)-2.3+10|}{\sqrt{4+1+4}}$$

$$= \frac{7}{3} \text{ br.}$$

Not:



Paralel iki düzlem arasındaki uzaklık bulunurken düzlemlerin birinden bir nokta alınıp diğer düzleme olan uzaklığı bulunur.

$$d(P,Q) = d(A,P) = \|\overrightarrow{AB}\| \text{ dır.}$$

Örnek:

$P \ldots 2x+y-2z+10=0$

$Q \ldots 2x+y-2z+1=0$ düzlemleri arasındaki uzaklığı bulunuz.

Çözüm:

$y=z=0$ için $x=-5 \Rightarrow A(-5,0,0) \in P$

$$d(A,Q)=\frac{|-10+1|}{\sqrt{9}}=3 \text{ br.}$$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Analitik geometri

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 11