ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

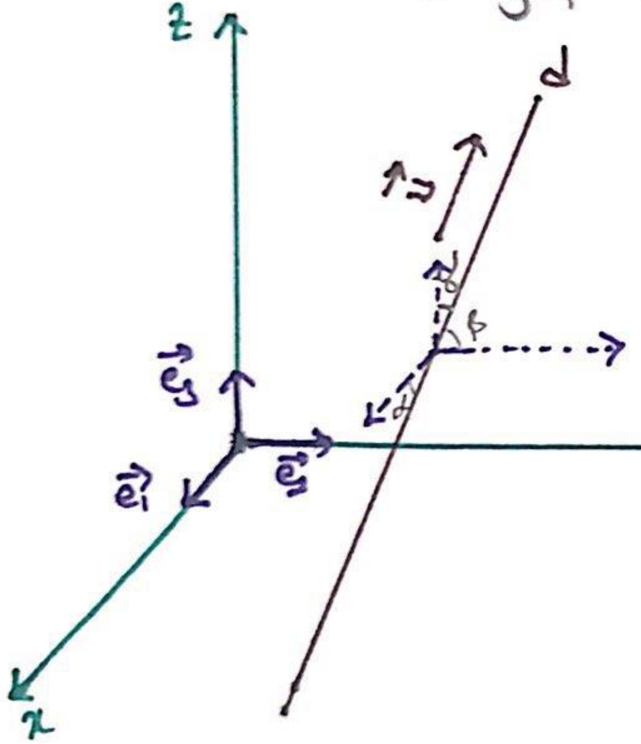
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 10

Bir Doğrunun Koordinat Eksenleri ile Yaptığı Açılar Cinsinden Denklemi

Bir $d \ldots \dfrac{x-x_1}{a} = \dfrac{y-y_1}{b} = \dfrac{z-z_1}{c} = \lambda$ doğrusunun x, y ve z

eksenleri ile yaptığı açılar, sırası ile, α, β ve γ olsun.



O halde; $\vec{u}$ ile $\vec{e_1}$ arasındaki açı α,

$\vec{u}$ ile $\vec{e_2}$ arasındaki açı β,

$\vec{u}$ ile $\vec{e_3}$ arasındaki açı γ olur.

$$\Rightarrow \langle \vec{u}, \vec{e_1} \rangle = \|\vec{u}\| . \|\vec{e_1}\| . \cos\alpha$$

$$\Rightarrow \cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

Benzer şekilde $\cos\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$, $\cos\gamma = \dfrac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$

bulunur.

Bu eşitlikler d nin denkleminde yerine yazılırsa,

$$d \ldots \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = \underbrace{\lambda\sqrt{a^2+b^2+c^2}}_{t}$$

$$\Rightarrow \boxed{d \ldots \frac{x-x_1}{\cos\alpha} = \frac{y-y_1}{\cos\beta} = \frac{z-z_1}{\cos\gamma} = t}$$ bulunur.

Ayrıca $\boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$ olup $\boxed{\vec{u} = (\cos\alpha, \cos\beta, \cos\gamma)}$ alınabilir.

$\cos\alpha$, $\cos\beta$ ve $\cos\gamma$ ya d doğrusunun doğrultu kosinüsleri denir.

Örnek: A(3,-5,4) ve B(-6,1,2) noktalarından geçen doğrunun doğrultu kosinüslerini bulunuz.

Çözüm:

$\vec{B} = \vec{AB} = (-9, 6, -2)$ dir.

$\Rightarrow a = -9, \ b = 6, \ c = -2$

$$\cos\alpha = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-9}{11}$$

$$\cos\beta = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{6}{11}$$

$$\cos\gamma = \frac{c}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}} = \frac{-2}{11}$$ bulunur.

Örnek: A(0,2,3) noktasından geçen, x ekseniyle 120^0 ve y ekseniyle 60^0 açı yapan d doğrusunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

d nin eksenler ile yaptığı açılara α, β ve γ dersek,

$\alpha = 120^0$, $\beta = 60^0$ olur.

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1 \Rightarrow \cos\gamma = \mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-0}{\cos\alpha} = \frac{y-2}{\cos\beta} = \frac{z-3}{\cos\gamma} = \lambda$$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x}{-\frac{1}{2}} = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z}{\mp\frac{1}{\sqrt{2}}} = \lambda \text{ olur.}$$

Örnek:

$$d_1 \ldots \frac{x-1}{n} = \frac{y-2}{1} = \frac{z-1}{2} = \lambda \text{ ve } d_2 \ldots \frac{x}{3} = \frac{y}{2m} = \frac{z+2}{1} = t$$

doğrularının paralel olması için m ve n ne olmalıdır?

Çözüm:

$$\vec{v}_1 = (n,1,2) \ , \ \vec{v}_2 = (3,2m,1)$$

$\vec{v}_1 \parallel \vec{v}_2$ yani $\vec{v}_1 = k\vec{v}_2$ olmalıdır.

$$\Rightarrow (n,1,2) = k(3,2m,1)$$

$$\Rightarrow n = 3k \ , \ 1 = 2mk \ , \ 2 = k$$

$$\Rightarrow n = 6 \ , \ m = 1/4$$

Örnek: $A(-1,2,-3)$ noktasından geçen, $\vec{u}=(6,-2,-3)$ vektörüne dik olan ve $d_1 \dots \frac{x-1}{3}=\frac{y+1}{2}=\frac{z-3}{-5}=\lambda$ doğrusunu kesen d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$d \dots \frac{x+1}{a}=\frac{y-2}{b}=\frac{z+3}{c}=t \quad , \quad \vec{u}_d=(a,b,c) \text{ olsun.}$$

$$\vec{u}_d \perp \vec{u} \Rightarrow 6a-2b-3c=0 \dots (1)$$

$\lambda=0$ için $B(1,-1,3)\in d_1$ olup d ile d_1 in kesişmesi şartı,

$\det(\vec{u}_d, \vec{u}_{d_1}, \vec{AB})=0$ dır.

$\vec{AB}=(2,-3,6)$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 3 & 2 & -5 \\ 2 & -3 & 6 \end{vmatrix}=0 \Rightarrow -3a-28b-13c=0 \dots (2)$$

(1) ve (2) de $c=1$ alınırsa $b=-\frac{1}{2}$, $a=\frac{1}{3}$ bulunur.

$\Rightarrow \vec{v}_d = (a,b,c) = \left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{2}, 1\right)$

$\Rightarrow \vec{v}_d = (2,-3,6)$ alınabilir.

$\Rightarrow d \ldots \quad \frac{x+1}{2} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+3}{6} = t$ bulunur.

Örnek: $A(2,0,-2)$ noktasından geçen ve

$$d_1 \ldots \frac{x-3}{2} = y = \frac{z-1}{2} = \lambda, \quad d_2 \ldots \frac{x}{3} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z-2}{2} = t$$

doğrularına dik olan d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$d \ldots \frac{x-2}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z+2}{c} = k, \quad u_d = (a,b,c) \text{ dir.}$$

$d \perp d_1 \Rightarrow \vec{u}_d \perp u_{d_1} \Rightarrow \vec{u}_{d_1} = (2,1,2)$ olduğundan $2a+b+2c=0$

$d \perp d_2 \Rightarrow \vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2} \Rightarrow \vec{u}_{d_2} = (3,-1,2)$ olduğundan $3a-b+2c=0$

$c=1$ için $a = -\frac{4}{5}$ ve

$b = -\frac{2}{5}$

$\Rightarrow \vec{u}_d = \left(-\frac{4}{5}, -\frac{2}{5}, 1\right) \Rightarrow \vec{u}_d = (-4,-2,5)$ alınabilir.

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-2}{-4} = \frac{y}{-2} = \frac{z+2}{5} = k \text{ bulunur.}$$

2.yol:

$\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1}$ ve $\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_2}$ olduğundan $\vec{u}_d = \vec{u}_{d_1} \wedge \vec{u}_{d_2}$ alınabilir.

$$\Rightarrow \vec{u}_d = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{vmatrix} = (4,2,-5) \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-2}{4} = \frac{y}{2} = \frac{z+2}{-5} = k \text{ bulunur.}$$

Örnek: A(2,0,-3) noktasından geçen ve y eksenine paralel olan d_1 doğrusu ile

$$d_2 \cdots \begin{cases} x = 1+3t \\ y = 2-t \\ z = 0 \end{cases}$$

doğrusunun birbirine göre durumunu irdeleyiniz.

Örnek: $A(3,1,-2)$ noktasından geçen ve $d_1 \ldots \begin{cases} x=-1+t \\ y=-2+t \\ z=-1+t \end{cases}$

doğrusunu dik kesen d doğrusunu bulunuz.

Çözüm:

$$d \ldots \frac{x-3}{a} = \frac{y-1}{b} = \frac{z+2}{c} = \lambda \text{ olsun. } \vec{u}_d = (a,b,c),\ \vec{u}_{d_1} = (1,1,1)$$

dir.

$d \perp d_1$ old.dan $\vec{u}_d \perp \vec{u}_{d_1} \Rightarrow a+b+c=0 \ldots (1)$

d ile d_1 in kesişme şartını yazalım:

$t=0$ için $B(-1,-2,-1) \in d_1 \Rightarrow \vec{AB} = (-4,-3,1)$

$$\det(\vec{u}_d, \vec{u}_{d_1}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} a & b & c \\ 1 & 1 & 1 \\ -4 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 4a-5b+c=0 \ldots (2)$$

(1) ve (2) den $b=1$ için $a=2$, $c=-3$ olur. O halde $\vec{u}_d = (2,1,-3)$ elde edilir.

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-3}{2} = \frac{y-1}{1} = \frac{z+2}{-3} = \lambda \text{ bulunur.}$$

Örnek:

$$d_1 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y-2m}{1} = \frac{z-1}{1} = \lambda \text{ ve } d_2 \ldots \frac{x-m}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z-1}{1} = t$$

doğruların kesişmesi için m ne olmalıdır?

Çözüm:

$\vec{U}_{d_1} = (2,1,1)$, $\vec{U}_{d_2} = (1,2,1)$ dir.

$\lambda = 0$ için $A(0,2m,1) \in d_1$, $t=0$ için $B(m,0,1) \in d_2$

$\Rightarrow \vec{AB} = (m, -2m, 0)$

$$\det(\vec{U}_{d_1}, \vec{U}_{d_2}, \vec{AB}) = 0 \Rightarrow \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ m & -2m & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow 4m + m - 4m = 0 \Rightarrow m = 0$$

Örnek: $A(1,0,0)$ dan geçen, $d_1 \ldots \frac{x-2}{1} = \frac{y}{2} = \frac{z+1}{-1} = \lambda$ ve $d_2 \ldots \frac{x}{2} = \frac{y+1}{1} = \frac{z}{3} = t$ doğrularını kesen d doğrusunu bulunuz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 10