ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

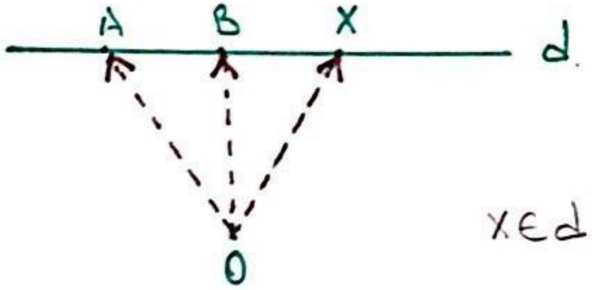
Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 9

UZAYDA DOĞRU

İki Noktası Verilen Doğrunun Denklemi

Uzayda $A(x_1,y_1,z_1)$ ve $B(x_2,y_2,z_2)$ noktalarından geçen d doğrusunun denklemini bulalım: Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$\Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$

$X \in d$ olması için

$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{AB}}$ Doğrunun vektörel denklemi

olmalıdır.

$$\Rightarrow (x,y,z) = (x_1,y_1,z_1) + \lambda(x_2-x_1,\ y_2-y_1,\ z_2-z_1)$$

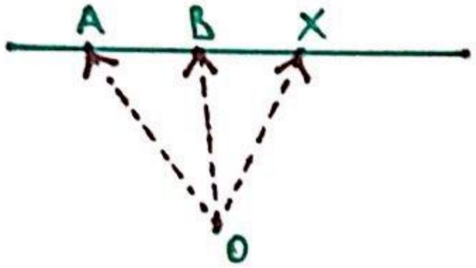
$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda(x_2-x_1) \\ y = y_1 + \lambda(y_2-y_1) \\ z = z_1 + \lambda(z_2-z_1) \end{cases}}$$ Doğrunun parametrik denklemi

$$\boxed{\frac{x-x_1}{x_2-x_1} = \frac{y-y_1}{y_2-y_1} = \frac{z-z_1}{z_2-z_1} = \lambda}$$ Doğrunun kartezyen denklemi

Örnek: $A(-1,3,5)$, $B=(2,4,7)$ noktalarından geçen doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm:

Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x,y,z)$ olsun.



$$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$$

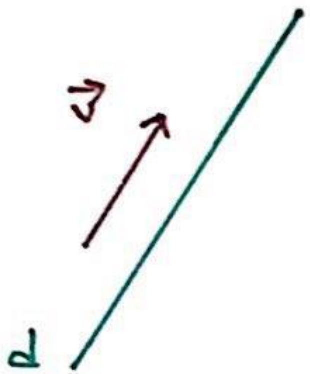
$$\Rightarrow \vec{OX} = \vec{OA} + \lambda AB \rightarrow \text{vektörel d.}$$

$$\frac{x-(-1)}{2-(-1)} = \frac{y-4}{4-3} = \frac{z-5}{7-5} = \lambda$$

$$\Rightarrow \frac{x+1}{3} = \frac{y-4}{1} = \frac{z-5}{2} = \lambda \rightarrow \text{kartezyen d.}$$

$$\begin{cases} x = -1+3\lambda \\ y = 4+\lambda \\ z = 5+2\lambda \end{cases} \rightarrow \text{parametrik d.}$$

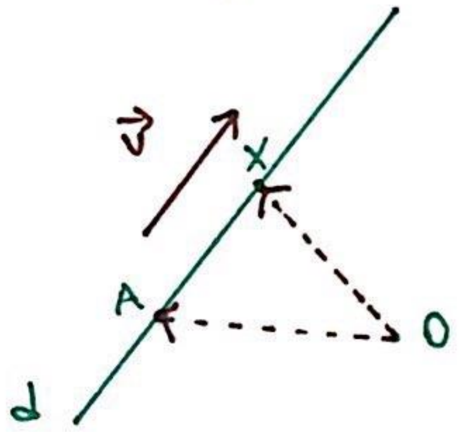
Tanım: Doğruya paralel olan vektöre doğrunun doğrultman vektörü denir.



Doğrultman vektörünün katı da $(\lambda\vec{v})$ yine doğrultman vektörüdür.

Bir Noktası ve Doğrultman Vektörü Verilen Doğrunun Denklemi

$A(x_1, y_1, z_1)$ noktasından geçen ve doğrultman vektörü $\vec{v} = (a, b, c)$ olan doğrunun denklemini bulalım:



Doğru üzerinde keyfi bir nokta $X(x, y, z)$ olsun.

$\vec{OX} = \vec{OA} + \vec{AX}$ dir.

X in d üzerinde bulunması şartı:

$\boxed{\vec{OX} = \vec{OA} + \lambda \vec{v}}$ Doğrunun vektörel denklemi

$(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1) + \lambda (a, b, c)$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{cases} x = x_1 + \lambda a \\ y = y_1 + \lambda b \\ z = z_1 + \lambda c \end{cases}}$$ Doğrunun parametrik denklemi

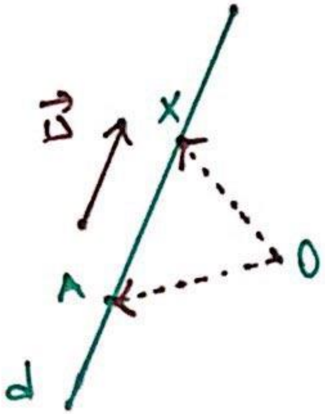
$\boxed{\dfrac{x - x_1}{a} = \dfrac{y - y_1}{b} = \dfrac{z - z_1}{c} = \lambda}$ Doğrunun kartezyen denklemi

Not: Parametrik yazılışta parametrenin katsayıları, kartezyen yazılışta ise paydadaki sayılar doğrultman vektörünü oluşturur.

Not: Parametreye verilen her değer için doğru üzerinde bir nokta elde edilir.

Örnek: A(1,0,3) noktasından geçen ve $\vec{u}=(-1,2,5)$ vektörüne paralel olan doğrunun vektörel, parametrik ve kartezyen denklemini bulunuz.

Çözüm:



$$\vec{OX}=\vec{OA}+\vec{AX}$$

$$\Rightarrow \vec{OX}=\vec{OA}+\lambda\vec{u} \quad \text{vektörel d.}$$

$$\frac{x-1}{-1}=\frac{y-0}{2}=\frac{z-3}{5}=\lambda \quad \text{kartezyen d.}$$

$$\begin{cases} x=1+\lambda \\ y=2\lambda \\ z=3+5\lambda \end{cases} \quad \text{parametrik d.}$$

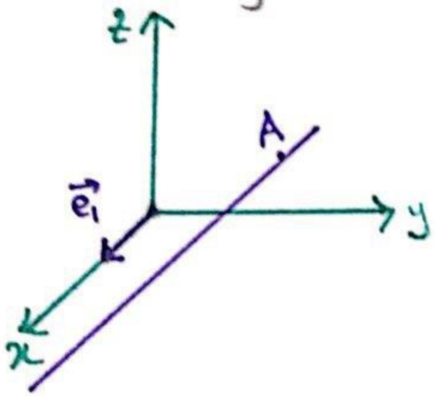
Örnek: $\frac{x-1}{2} = \frac{y+2}{3} = \frac{z}{0} = t$ denklemi, doğrultmanı $\vec{v} = (2,3,0)$ olan ve $t=0$ için $A(1,-2,0)$ noktasından geçen bir doğru belirtir.

Örnek:

$$\begin{cases} x = -1+3t \\ y = 3 \\ z = -t \end{cases}$$

denklemi, doğrultmanı $\vec{v} = (3,0,-1)$ olan ve $t=0$ için $A(-1,3,0)$ noktasından geçen bir doğru belirtir.

Örnek: $A(1,1,2)$ noktasından geçen ve x eksenine paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.



Doğrunun doğrultmanı $\vec{u} = \vec{e}_1 = (1,0,0)$ alınabilir.

$$\Rightarrow d \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y-1}{0} = \frac{z-2}{0} = \lambda$$

$$\Rightarrow d \ldots \begin{cases} x = 1+\lambda \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases}$$

Örnek: x ekseninin denklemini yazınız.

Çözüm:

$A(1,0,0)$ dan geçen ve doğrultmanı $B=(1,0,0)$ olan doğru olarak düşünülebilir.

$$\Rightarrow \frac{x-1}{1}=\frac{y-0}{0}=\frac{z-0}{0}=\lambda$$

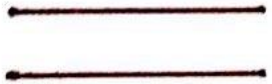
$$\Rightarrow \begin{cases} x=\lambda \\ y=0 \\ z=0 \end{cases}$$

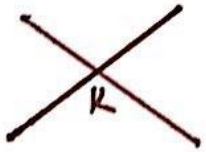
Örnek: y ve z eksenlerinin denklemlerini yazınız.

İki Doğrunun Birbirine Göre Durumu

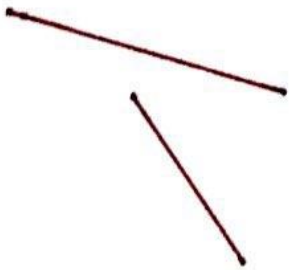
Uzayda d_1 ve d_2 doğruları verilsin. Bu iki doğru için dört durum söz konusudur:

1) d_1 ve d_2 çakışıktır  $d_1 = d_2$

2) d_1 ve d_2 paraleldir  $d_1 \parallel d_2$

3) d_1 ve d_2 bir noktada kesişir 

$d_1 \cap d_2 = \{K\}$

4) d_1 ve d_2 aykırıdır 

Not: Aykırı doğrular aynı düzlem içine alınamayan doğrulardır.

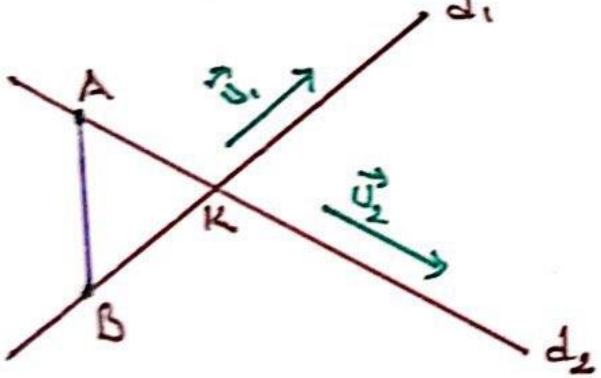
d_1 in doğrultmanı u_1 ve d_2 nin doğrultmanı da $\vec{u}_2$ olsun.

a) $\vec{u}_1 \parallel \vec{u}_2$ $(\vec{u}_1 = \lambda \vec{u}_2)$ ise d_1 ile d_2 ya çakışıktır ya da paraleldir.

$A \in d_1$ için $A \in d_2$ ise d_1 ile d_2 çakışıktır.

$A \in d_1$ için $A \notin d_2$ ise d_1 ile d_2 paraleldir.

b) $\vec{u}_1 \nparallel \vec{u}_2$ $(\vec{u}_1 \neq \lambda \vec{u}_2)$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişirler ya da aykırıdırlar.



$A \in d_1$, $B \in d_2$ için

$\langle \vec{u}_1 \wedge \vec{u}_2, \vec{AB} \rangle = 0$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişir. Yani,

$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = 0$ ise d_1 ile d_2 bir noktada kesişir.

Eğer $\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) \neq 0$ ise d_1 ile d_2 aykırıdır.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = 2+t \\ y = 3t \\ z = -1+t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+1}{2} = \lambda$$

doğruların birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (1,3,1)$, $\vec{u}_2 = (3,5,2)$ dir. $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$ olduğundan d_1 ile d_2 ya bir noktada kesişir ya da aykırıdır.

$t=0$ için $A(2,0,-1) \in d_1$, $\lambda = 0$ için $B(1,0,-1) \in d_2$ alalım.

$\Rightarrow \vec{AB} = (-1,0,0)$ olur.

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 3 & 5 & 2 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = (-1) \cdot 1 = -1 \neq 0$$

$\Rightarrow d_1$ ile d_2 aykırıdır.

Örnek: $d_1 \ldots \dfrac{x+2}{-1} = \dfrac{y+5}{4} = \dfrac{z}{0} = \lambda$ ve $d_2 \ldots \begin{cases} x = -1+3t \\ y = -9+t \\ z = 2t \end{cases}$

doğrularının birbirine göre durumunu irdeleyiniz.

Çözüm:

$\vec{u}_1 = (-1,4,0)$, $\vec{u}_2 = (3,1,2)$ dir. $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$ olduğundan d_1 ile d_2 ya bir noktada kesişir ya da aykırıdır.

$\lambda = 0$ için $A(-2,-5,0) \in d_1$, $t=0$ için $B(-1,-9,0) \in d_2$ alalım.

$\vec{AB} = (1,-4,0)$ olur.

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} -1 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & -4 & 0 \end{vmatrix} = (-1).8 - 4.(-2) + 0 = 0$$

O halde d_1 ile d_2 bir noktada kesişir.

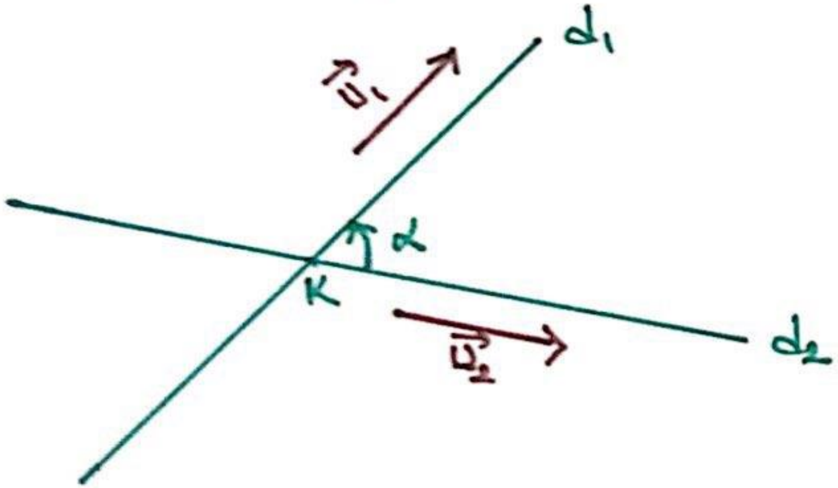
Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -1 + t \\ y = 3 \\ z = 2 + 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-1}{1} = \frac{y}{0} = \frac{z}{2} = \lambda$$

doğruların birbirine göre durumunu inceleyiniz.

Kesişen İki Doğru Arasındaki Açı

Kesişen iki doğru arasındaki açı bu doğruların doğrultmanları arasındaki açıya eşittir.



$$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\alpha$$

Kesişen İki Doğrunun Arakesit Noktasının Bulunması

$d_1 \cap d_2 = \{K\}$ ve $K = (x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in d_1$ ve $K \in d_2$ olduğu kullanılıp denklemler ortak çözülerek K bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \frac{2x+5}{3} = \frac{y}{3} = z = \lambda$$

$$d_2 \ldots \frac{x+4}{2} = \frac{y+3}{4} = \frac{z+1}{3} = t$$

doğrularının bir noktada kesiştiğini gösteriniz, arakesit noktasını bulunuz, doğrular arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$d_1 \ldots \frac{x+5/2}{3/2} = \frac{y}{3} = z = \lambda$$

$\Rightarrow \vec{u}_1 = (3,6,2)$ alınabilir.

$\vec{u}_2 = (2,4,3)$ olup $\vec{u}_1 \not\parallel \vec{u}_2$ dir.

$\lambda = 1$ için $A(-1,3,1) \in d_1$, $t=0$ için $B(-4,-3,-1) \in d_2$

$\Rightarrow \vec{AB} = (-3,-6,-2)$

$$\det(\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{AB}) = \begin{vmatrix} 3 & 6 & 2 \\ 2 & 4 & 3 \\ -3 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0$$ olduğundan d_1 ve d_2 bir noktada kesişir.

$d_1 \cap d_2 = \{K\}$ ve $K(x_0, y_0, z_0)$ olsun.

$K \in d_1$ olduğundan $x_0 = \frac{3}{2}\lambda - \frac{5}{2}$, $y_0 = 3\lambda$, $z_0 = \lambda$

$K \in d_2$ olduğundan $x_0 = 2t - 4$, $y_0 = 4t - 3$, $z_0 = 3t - 1$ olur.

$\Rightarrow \begin{array}{l} 3\lambda = 4t - 3 \\ \lambda = 3t - 1 \end{array} \Rightarrow 9t - 3 = 4t - 3$

$\Rightarrow t = 0$

$\Rightarrow K(x_0, y_0, z_0) = (-4, -3, -1)$ bulunur.

d_1 ile d_2 arasındaki açı α olsun. O halde $\vec{u}_1$ ile $\vec{u}_2$ arasındaki açı da α olur.

$\langle \vec{u}_1, \vec{u}_2 \rangle = \|\vec{u}_1\| . \|\vec{u}_2\| . \cos\alpha$, $\vec{u}_1 = (3, 6, 2)$, $\vec{u}_2 = (2, 4, 3)$

$\Rightarrow 36 = \sqrt{49} . \sqrt{29} \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{36}{7\sqrt{29}} \Rightarrow \alpha = \arccos\left(\frac{36}{7\sqrt{29}}\right)$

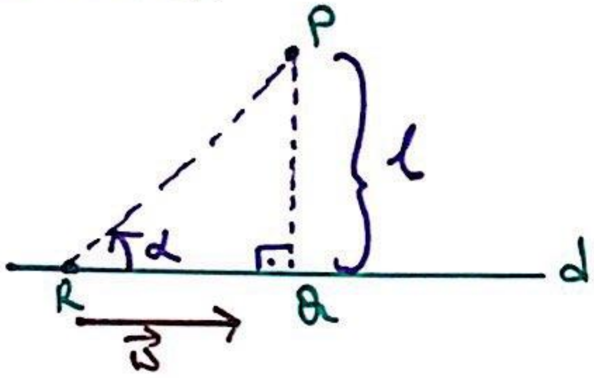
Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -1+3t \\ y = 0 \\ z = -5+4t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x-5}{2} = \frac{y}{1} = \frac{z-3}{2} = \lambda$$

doğruların arakesit noktasından geçen ve $\vec{u} = (1,-3,2)$ vektörüne paralel olan doğrunun denklemini bulunuz.

Bir Noktanın Bir Doğruya Uzaklığı

Bir P noktasının bir d doğrusuna olan uzaklığını bulalım:



Bir $R \in d$ alalım. $\vec{RP}$ ile $\vec{u}$ arasındaki açı α olsun.

$$\Rightarrow \|\vec{RP} \wedge \vec{u}\| = \|\vec{RP}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \sin\alpha$$

$$= \|\vec{RP}\| \cdot \|\vec{u}\| \cdot \frac{\ell}{\|\vec{RP}\|}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ell = \frac{\|\vec{RP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|}}$$ bulunur.

Örnek: $P(1,1,-1)$ noktasının $d \ldots \frac{x-1}{3} = y = 2z = \lambda$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Çözüm:

$$\vec{u} = \left(3, 1, \tfrac{1}{2}\right) \Rightarrow \vec{u} = (6,2,1) \text{ alınabilir.}$$

$\lambda = 0$ için $R = (1,0,0) \in d$ alalım.

$$l = \frac{\|\vec{RP} \wedge \vec{u}\|}{\|\vec{u}\|} \quad \text{idi.} \quad \vec{RP} = (0,1,-1)$$

$$\Rightarrow \vec{RP} \wedge \vec{u} = \begin{vmatrix} \vec{e_1} & \vec{e_2} & \vec{e_3} \\ 0 & 1 & -1 \\ 6 & 2 & 1 \end{vmatrix} = (3,-6,-6)$$

$$\Rightarrow \|\vec{RP} \wedge \vec{u}\| = \|3(1,-2,-2)\| = 3.\sqrt{9} = 9$$

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{41}$$

$$\Rightarrow l = \frac{9}{\sqrt{41}} \text{ bulunur.}$$

Örnek: A(−1, 2, −2) noktasının $d \ldots \begin{cases} x = 1 + t \\ y = -1 + 3t \\ z = -2t \end{cases}$ doğrusuna olan uzaklığını bulunuz.

Not: Paralel doğrular arasındaki uzaklık bulunurken, doğruların birinden bir nokta alınıp bu noktanın diğer doğruya olan uzaklığı bulunur.

Örnek:

$$d_1 \ldots \begin{cases} x = -2 + 3t \\ y = 1 + 5t \\ z = 2t \end{cases} \quad \text{ve} \quad d_2 \ldots \frac{x+1}{3} = \frac{y}{5} = \frac{z+2}{2} = \lambda$$

doğrularının paralel olduğunu gösteriniz. Aralarındaki uzaklığı bulunuz.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 9