ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

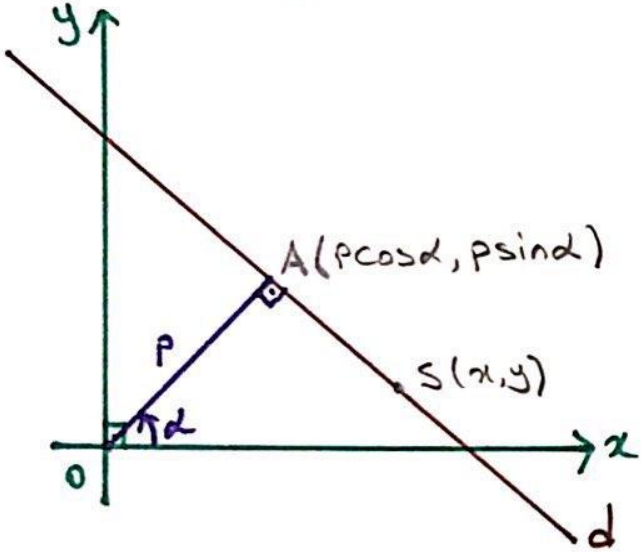
Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analitik Geometri I

Prof. Dr. Emin KASAP

Ders 8

Bir Doğrunun Normal Formu (Hesse Formu)



Bir d doğrusunun denklemini 0 dan d ye olan uzaklık ve bu dikmenin x ekseniyle pozitif yönde yaptığı açı cinsinden bulabiliriz. Buna doğrunun normal formu denir.

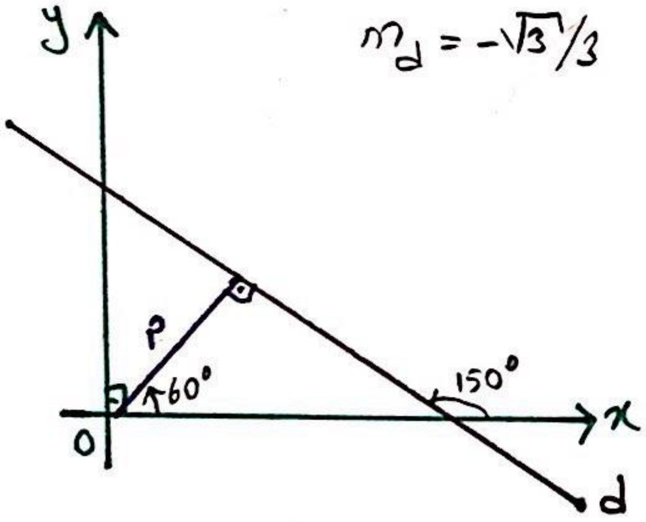
d üzerinde keyfi bir nokta $S(x,y)$ olsun. $\langle \vec{OA}, \vec{AS} \rangle = 0$ dır.

$\Rightarrow p\cos\alpha\,(x - p\cos\alpha) + p\sin\alpha\,(y - p\sin\alpha) = 0$

$\Rightarrow \boxed{\cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0}$ doğrunun normal formu

Örnek: Denklemi $x+\sqrt{3}y-4=0$ olan d doğrusunun normal formunu bulunuz.

Çözüm:



$m_d = -\sqrt{3}/3$

$$p = \frac{|-4|}{\sqrt{1+3}} = 2$$

$$\alpha = 60° \Rightarrow \cos\alpha = \frac{1}{2}, \sin\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Rightarrow \cos\alpha\, x + \sin\alpha\, y - p = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y - 2 = 0$$ bulunur.

Not: Doğrunun normal formunu kısa yoldan da bulabiliriz:

$Ax+By+C=0$ genel doğru denklemini $k \neq 0$ ile çarpalım

$$\Rightarrow kAx+kBy+kC=0 \ldots (1)$$

Doğrunun normal formu

$$\cos\alpha\, x+\sin\alpha\, y-p=0 \ldots (2)$$

Bu iki denklemi karşılaştırarak k çarpanını bulalım:

$\cos\alpha = kA$, $\sin\alpha = kB$, $kC=-p$ olur.

$$\Rightarrow k^2(A^2+B^2)=1 \Rightarrow k=\mp\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

O halde genel denklemi normal denkleme çevirmek için denklemin her iki yanını $\mp\frac{1}{\sqrt{A^2+B^2}}$ ile çarpmak gerekir.

Kökün İşaretinin Belirlenmesi

$kC=-p$ olduğundan $kC<0$ dır. Yani C ile k zıt işaretlidir.

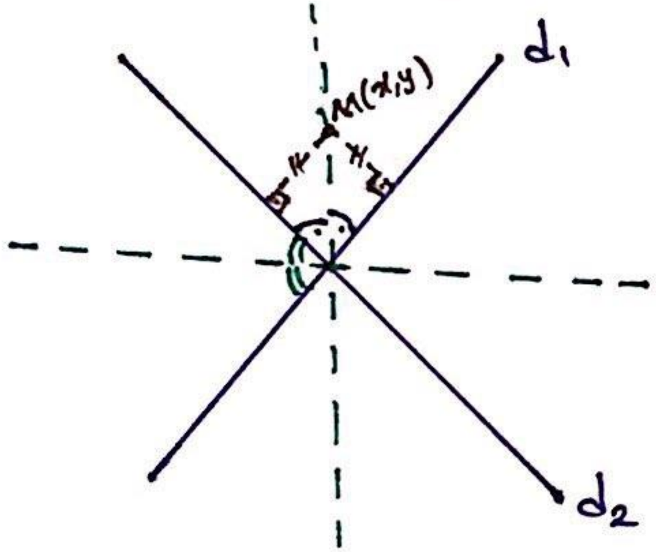
Örnek: $3x-4y-8=0$ doğrusunun normal formunu bulunuz.

Çözüm:

$$k = \mp \frac{1}{5} \qquad C=-8<0 \Rightarrow k = \frac{1}{5}$$

$$\Rightarrow \frac{3}{5}x - \frac{4}{5}y - \frac{8}{5} = 0$$

Kesişen İki Doğrunun Açıortay Doğruları



$d_1 \ldots A_1x + B_1y + C_1 = 0$

$d_2 \ldots A_2x + B_2y + C_2 = 0$

Açıortay üzerinde alınan bir noktanın açının kollarına olan uzaklığı eşit olacağından,

$$\frac{|A_1x + B_1y + C_1|}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{|A_2x + B_2y + C_2|}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

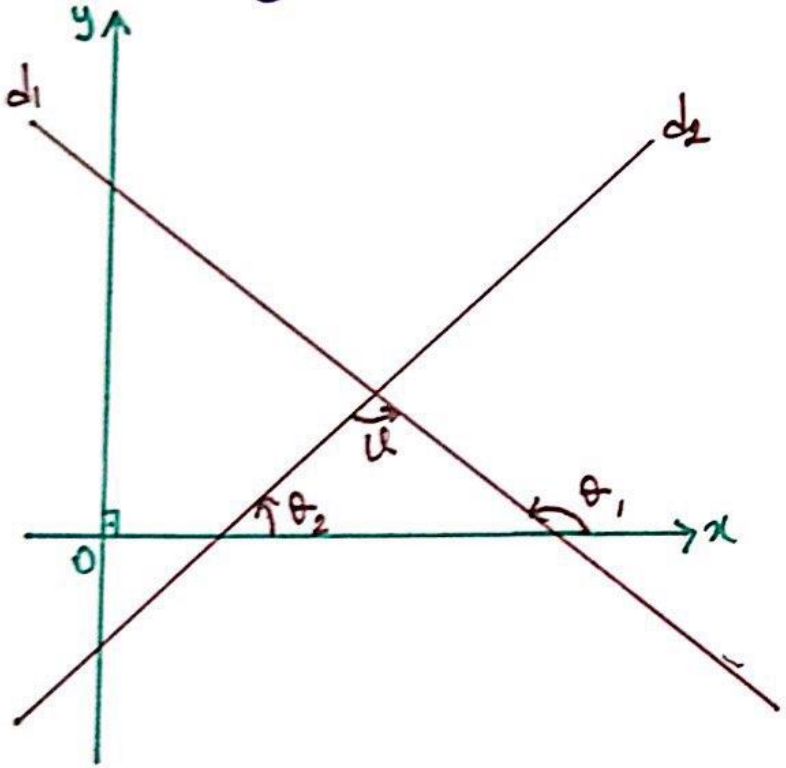
$$\Rightarrow \frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \mp \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Örnek: $3x-3y+4=0$ ve $x+y+8=0$ doğrularının oluşturduğu açıortay doğrularının denklemini bulunuz.

Çözüm:

$$\frac{3x-3y+4}{\sqrt{9+9}} = \mp \frac{x+y+8}{\sqrt{1+1}} \Rightarrow 3y+1=0 \text{ ve } 3x+5=0$$

İki Doğru Arasındaki Açı



$m_{d_1} = \tan\theta_1$, $m_{d_2} = \tan\theta_2$

$\theta_1 = \alpha + \theta_2$

$$\tan\alpha = \tan(\theta_1 - \theta_2)$$

$$= \frac{\tan\theta_1 - \tan\theta_2}{1 + \tan\theta_1 \tan\theta_2}$$

$$= \frac{m_{d_1} - m_{d_2}}{1 + m_{d_1} \cdot m_{d_2}}$$

Örnek: $x-4y+3=0$ ve $3x+5y-4=0$ doğruları arasındaki açıyı bulunuz.

Çözüm:

$$m_1 = \frac{1}{4} \quad , \quad m_2 = -\frac{3}{5}$$

$$\tan\alpha = \frac{\frac{1}{4}+\frac{3}{5}}{1-\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{5}} = 1 \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$$

Diğer açı $\pi - \frac{\pi}{4} = \frac{3\pi}{4}$

Doğru Demeti

Teorem: $A_1x+B_1y+C_1=0$ ve $A_2x+B_2y+C_2=0$ doğrularının kesim noktası $S(x_0,y_0)$ olsun. α ve β nın ikisi birden aynı anda sıfır olmamak koşulu ile

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

denklemi S den geçen bir doğru belirtir.

İspat:

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0$$

denkleminin bir doğru belirttiğini gösterelim: Bu denklem düzenlenirse

$$(A_1\alpha+A_2\beta)x+(B_1\alpha+B_2\beta)y+C_1\alpha+C_2\beta=0$$

olur. Bu denklemin bir doğru belirtmesi için

$A_1\alpha+A_2\beta$ ve $B_1\alpha+B_2\beta$ nın aynı anda sıfır olmaması

gerekir.

Kabul edelim ki,

$$B_2 \,/\, A_1\alpha + A_2\beta = 0$$

$$-A_2 \,/\, B_1\alpha + B_2\beta = 0 \quad \text{olsun}$$

$$\Rightarrow (A_1B_2 - B_1A_2)\alpha = 0 \ldots (1)$$

olur.

$$-B_1 \,/\, A_1\alpha + A_2\beta = 0$$

$$A_1 \,/\, B_1\alpha + B_2\beta = 0$$

$$\Rightarrow (A_1B_2 - B_1A_2)\beta = 0 \ldots (2)$$

Hipotezden α ve β dan en az biri sıfırdan farklı olacağından

(1) ve (2) den

$$A_1B_2 - B_1A_2 = 0 \quad \text{dır.}$$

$$\Rightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} \quad \text{olur.}$$

$$\Rightarrow d_1 \parallel d_2$$

Bu ise d_1 ve d_2 nin S da kesişmesi ile çelişir.

O halde $A_1\alpha + A_2\beta$ ve $B_1\alpha + B_2\beta$ aynı anda sıfır olamaz.

$$\Rightarrow \alpha(A_1x + B_1y + C_1) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$$

denklemi bir doğru belirtir.

Ayrıca S iki doğrunun da kesim noktası olduğundan doğruların denklemini sağlar.

$$\Rightarrow A_1x_0 + B_1y_0 + C_1 = 0 \text{ ve } A_2x_0 + B_2y_0 + C_2 = 0 \text{ dır.}$$

$$\Rightarrow \alpha(A_1x_0 + B_1y_0 + C_1) + \beta(A_2x_0 + B_2y_0 + C_2) = 0$$

olup $\alpha(A_1x + B_1y + C) + \beta(A_2x + B_2y + C_2) = 0$ denklemi S den geçen bir doğru belirtir.

Tanım: Düzlemin bir S noktasından geçen iki doğru $A_1x+B_1y+C_1=0$ ve $A_2x+B_2y+C_2=0$ olmak üzere S den geçen tüm doğrulara S deki doğru demeti denir. Doğru demetinin denklemi

$$\alpha(A_1x+B_1y+C_1)+\beta(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \text{dır.}$$

Not: $\alpha\neq0$ için $\lambda=\beta/\alpha$ alınırsa doğru demeti için

$$A_1x+B_1y+C_1+\lambda(A_2x+B_2y+C_2)=0 \quad \text{yazılabilir.}$$

Uyarı: Son denklem de S den geçen tüm doğruların denklemidir. Fakat bu denklem $A_2x+B_2y+C_2=0$ doğrusunu vermez.

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından ve A(-1,3) den geçen doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

S den geçen tüm doğruların denklemi,

$$x+2y-8+\lambda(3x-y-3)=0$$

dır. Aradığımız doğru A dan geçeceğinden A noktası yukarıdaki denklemi sağlar.

$\Rightarrow$ $\lambda=-1/3$ olur.

$\Rightarrow$ $y-3=0$ elde edilir.

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından geçen ve $x+2y+7=0$ doğrusuna dik olan doğrunun denklemini bulunuz.

Çözüm:

S den geçen tüm doğrular,

$$x+2y-8+\lambda(3x-y-3)=0$$

denklemine sahiptir. Bu doğruların eğimleri $\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}$ şeklindedir.

Diklik koşulundan,

$$\frac{3\lambda+1}{\lambda-2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=-1 \Rightarrow \lambda=-5 \text{ olur.}$$

$$\Rightarrow 2x-y-1=0 \text{ bulunur.}$$

Örnek: $x+2y-8=0$ ve $3x-y-3=0$ doğrularının S kesim noktasından geçen ve $3x-y+8=0$ doğrusuna paralel olan doğruyu bulunuz.
$(3x-y-3=0)$

Örnek: $3x+4y+9=0$ doğrusunun $2x+y+1+\lambda(x-3y-10)=0$ demetine ait olduğunu gösteriniz.

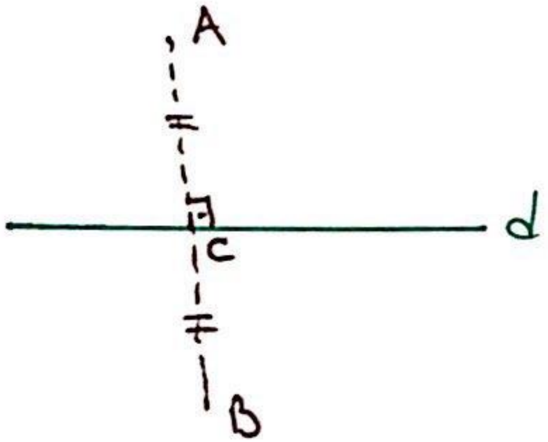
Çözüm:

Demetin ortak noktası $\begin{cases} 2x+y+1=0 \\ x-3y-10=0 \end{cases}$ dan $K(1,-3)$ dir.

$3.1+4.(-3)+9=0$ olup K noktası $3x+4y+9=0$ doğrusunun da üzerindedir.

Örnek: A(1,4) noktasının $3x-2y-8=0$ doğrusuna göre simetriği olan $B(\alpha,\beta)$ noktasını bulunuz.

Çözüm:



$C\left(\frac{\alpha+1}{2}, \frac{\beta+4}{2}\right)$ dir.

$C \in d$ olduğundan

$$3\left(\frac{\alpha+1}{2}\right) - 2\left(\frac{\beta+4}{2}\right) - 8 = 0$$

$$\Rightarrow 3\alpha - 2\beta = 21 \ldots (1)$$

$m_{AB} = \frac{\beta-4}{\alpha-1}$, $m_d = \frac{3}{2}$

$m_{AB} \cdot m_d = -1$

$$\Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 14 \ldots (2)$$

(1) ve (2) den B(7,0) bulunur.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Teşekkürler

Prof. Dr. Emin KASAP

Analitik geometri

Ders 8