



Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları



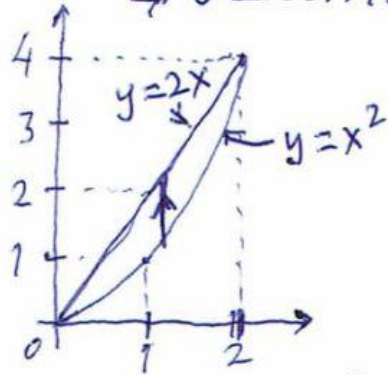
(144)
Bu örnekteki gibi bir çift katlı integral hesaplanırken bir şekil çizmek gerekli bir iştir.

Genelde son şekilde düz bir ok çizmek yararlı olur. Böylece isteki integralin sınırları şekle göre bulunabilir.

Eğer isteki integral x -değişkenine bağlı ise integral sınırlarını belirlemek için yatay bir ok çizilir.

ÖRNEK. $z = x^2 + y^2$ paraboloidinin altında ve xy -düzlemindeki $y = 2x$ doğrusu ve $y = x^2$ parabolü ile sınırlı D bölgesi üstünde kalan katı cismin hacmini bulunuz.

Çözüm. 1. Şekildeki gibi D , 1. tip bir bölgedir:



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq x \leq 2, x^2 \leq y \leq 2x\}.$$

Böylece $z = x^2 + y^2$ nin altında ve D nin üstünde kalan hacim

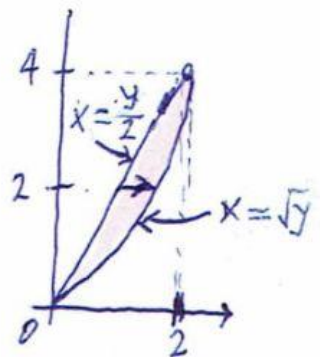
$$V = \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^2 \int_{x^2}^{2x} (x^2 + y^2) dy dx = \int_0^2 \left(x^2 y + \frac{y^3}{3} \right) \Big|_{y=x^2}^{y=2x} dx$$

$$= \int_0^2 \left(x^2(2x) + \frac{(2x)^3}{3} - x^2 x^2 - \frac{(x^2)^3}{3} \right) dx = \int_0^2 \left(-\frac{x^6}{3} - x^4 + \frac{14x^3}{3} \right) dx = \left[-\frac{x^7}{21} - \frac{x^5}{5} + \frac{7x^4}{6} \right]_0^2$$

olur.

$$= \frac{216}{35}$$

Çözüm 2. Yandaki şekle göre D , 2. tip bir bölge olarak temsil edilebilir:



$$D = \{(x, y) \mid 0 \leq y \leq 4, \frac{1}{2}y \leq x \leq \sqrt{y}\}.$$

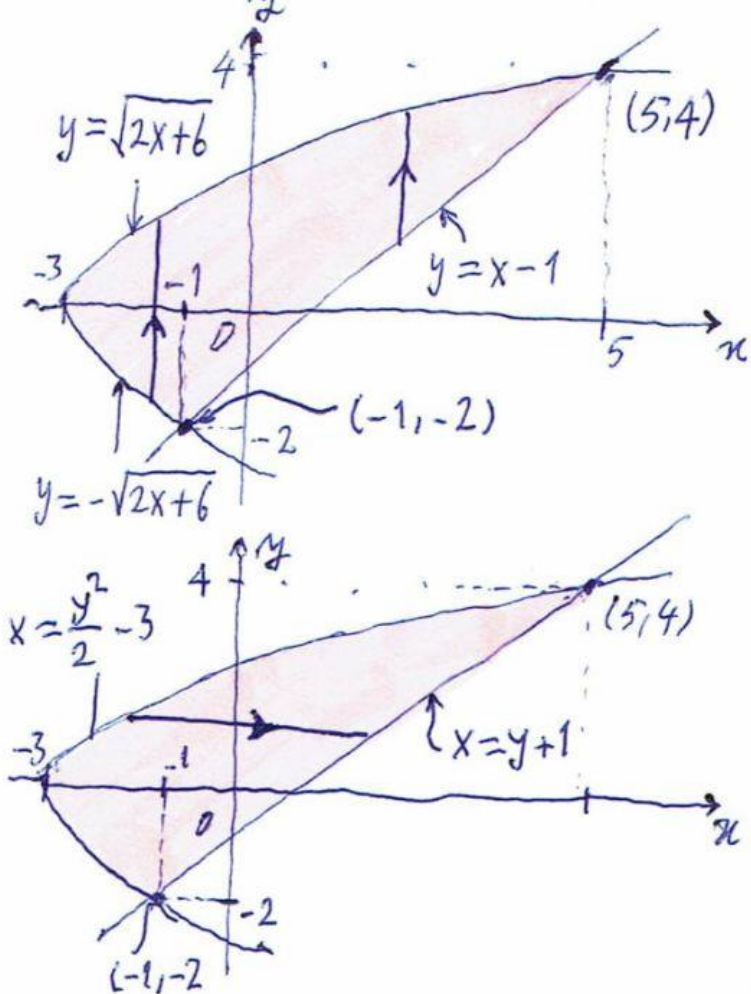
Böylece

$$\begin{aligned} V &= \iint_D (x^2 + y^2) dA = \int_0^4 \int_{y/2}^{\sqrt{y}} (x^2 + y^2) dx dy \\ &= \int_0^4 \left(\left(\frac{x^3}{3} + y^2 x \right) \Big|_{x=y/2}^{x=\sqrt{y}} \right) dy = \int_0^4 \left(\frac{y^{3/2}}{3} + y^{5/2} - \frac{y^3}{24} - \frac{y^3}{2} \right) dy = \left[\frac{2}{15} y^{5/2} + \frac{2}{7} y^{7/2} - \frac{y^4}{8} \right]_0^4 \\ &= \frac{216}{35} \end{aligned}$$

olur.

ÖRNEK. Eğer D , $y = x - 1$ ve $y^2 = 2x + 6$ ile sınırlı bölge ise $\iint_D xy dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $y = x - 1 \wedge y^2 = 2x + 6 \Rightarrow x = y + 1 \wedge x = \frac{y^2 - 6}{2} \Rightarrow y + 1 = \frac{y^2 - 6}{2} \Rightarrow 2y + 2 = y^2 - 6 \Rightarrow y^2 - 2y - 8 = (y + 2)(y - 4) = 0 \Rightarrow y = -2 \vee y = 4$ olur. Buna göre $y = x - 1$ ve $y^2 = 2x + 6$ eğrileri $(-1, -2)$, $(5, 4)$ noktalarında kesişirler. Grafik (D bölgesinin) şöyle çizilir:



(148)
 D bölgesi hem 1. tip, hem de 2. tip-
 tir, ama 1. tip olarak düşünül-
 mesi, daha karışıktır, çünkü
 sinir alt kenarı iki parça-
 dan ibarettir.

Bu yüzden D yi 2. tip bir bölge
 olarak düşünmek kolaylık sağlar.

$$D = \{(x, y) | -2 \leq y \leq 4, \frac{y^2}{2} - 3 \leq x \leq y+1\}.$$

O zaman

$$\iint_D xy dA = \int_{-2}^4 \int_{\frac{y^2}{2}-3}^{y+1} xy dx dy = \int_{-2}^4 \left[\frac{x^2 y}{2} \right]_{x=\frac{y^2}{2}-3}^{x=y+1} dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left[(y+1)^2 - \left(\frac{y^2}{2} - 3 \right)^2 \right] dy = \frac{1}{2} \int_{-2}^4 y \left(-\frac{y^4}{4} + 4y^2 + 2y - 8 \right) dy$$

$$= \frac{1}{2} \left[-\frac{y^6}{24} + y^4 + 2\frac{y^3}{3} - 4y^2 \right]_{-2}^4 = 36$$

olur.

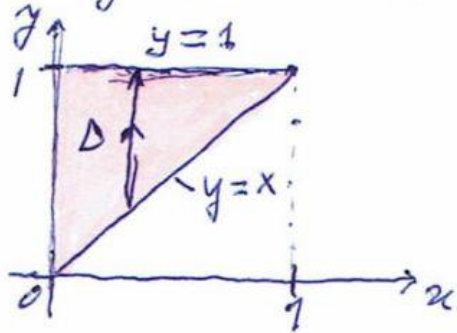
(147)
Eğer D 1. tip bir bölge olarak ifade edilseydi,

$$\iint_D xy dA = \int_{-3}^{-1} \int_{-\sqrt{2x+6}}^{\sqrt{2x+6}} xy dy dx + \int_{-1}^5 \int_{x+1}^{\sqrt{2x+6}} xy dy dx$$

yazılabiliirdi, ama 2. tip e göre daha çok iş gerekirdi.

ÖRNEK. $\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. $\int \sin(y^2) dy$ integrali hesaplamak güçtür. Ama integral alma sırasını değiştirince iş kolaylaşır.



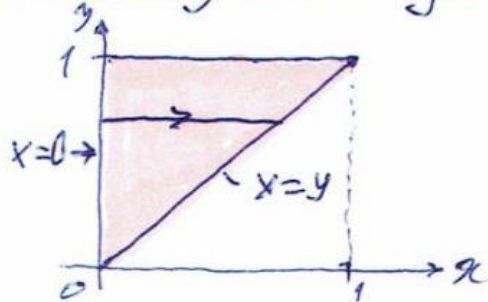
1. tip bir bölge olarak

$$D = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq 1, x \leq y \leq 1\}$$

üzerindeki integral olarak

$$\int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx = \iint_D \sin(y^2) dA$$

olduğunu görmek kolaydır. 2. tip e (yani integral alma sırasını değiştirme) dönüştürülünce



$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_x^1 \sin(y^2) dy dx &= \iint_D \sin(y^2) dA = \int_0^1 \int_0^y \sin(y^2) dx dy \\ &= \int_0^1 [x \sin(y^2)]_{x=0}^{x=y} dy = \int_0^1 y \sin(y^2) dy = -\frac{1}{2} \cos(y^2) \Big|_0^1 = \frac{1}{2} (1 - \cos 1) \end{aligned}$$

bulunur.

Çift Katlı İntegralin Özellikleri.

f ve g fonksiyonlarının D bölgesinde integrallenebilir olduğu biliniyorsa,

$$\iint_D [f(x,y) + g(x,y)] dA = \iint_D f(x,y) dA + \iint_D g(x,y) dA$$

ve

$$\iint_D c f(x,y) dA = c \iint_D f(x,y) dA \quad (c \text{ sabit})$$

olur, yine her $(x,y) \in D$ için $f(x,y) \geq g(x,y)$ ise

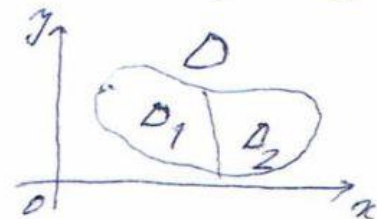
$$\iint_D f(x,y) dA \geq \iint_D g(x,y) dA$$

elde edilir.

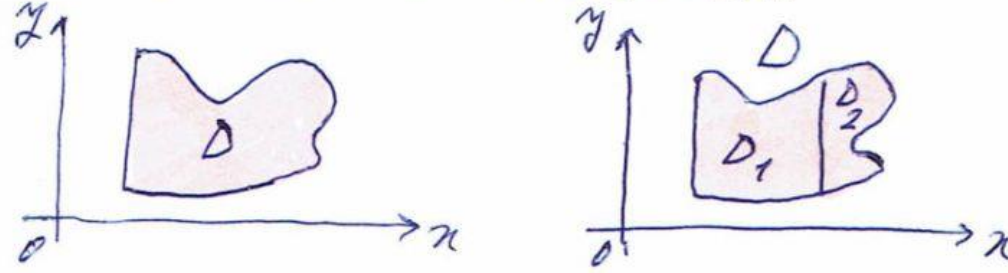
Eğer f fonksiyonu, sınırları dışında çıkarmayan D_1 ve D_2 bölgelerinde integrallenebiliyorsa ve $D = D_1 \cup D_2$ ise, o zaman

$$\iint_D f(x,y) dA = \iint_{D_1} f(x,y) dA + \iint_{D_2} f(x,y) dA$$

olur,



(149)
Bu özellik 1. tip ve 2. tip bölgelerin birleşimi olarak ifade edilebilen bölgeler üzerindeki integrallerin hesaplanmasında kullanılır.



Bir D bölgesi üzerinde $f(x,y)=1$ sabit fonksiyonunun integrali alınırsa, D nin $A(D)$ alanı elde edilir:

$$\iint_D 1 \, dA = A(D).$$

Eğer D üzerinde her (x,y) için $m \leq f(x,y) \leq M$ ise
 $m \cdot A(D) \leq \iint_D f(x,y) \, dA \leq M \cdot A(D)$
 olur.



Fırsatlar Sunar



Prof. Dr. Cenap DUYAR



Analiz IV Ders Notları



Analiz IV Ders Notları



Analiz IV Ders Notları