Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

34 Teorem (Fubini teoremi). Eğer f fonksiyonu
$$R=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ c\le y\le d\}$$
dikdörtgeni üzerinde sürekli ise,
$$\iint_R f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_c^d f(x,y)\,dy\,dx=\int_c^d\int_a^b f(x,y)\,dx\,dy$$
dur. Üstelik f, R üzerinde sınırlı, sadece sonlu sayıda düzgün eğri üzerinde süreksiz bir fonksiyon olmak üzere eğer R üzerinde f nin ardışık integralleri varsa, eşitlik yine doğrudur.

ÖRNEK. $R=\{(x,y)\mid 0\le x\le 2,\ 1\le y\le 2\}$ olmak üzere $\iint_R (x-3y^2)\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm. Fubini Teoremi ile
$$\iint_R (x-3y^2)\,dA=\int_0^2\int_1^2 (x-3y^2)\,dy\,dx=\int_0^2\left[xy-y^3\right]_{y=1}^{y=2}dx$$
$$=\int_0^2 (x-7)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}-7x\right]_0^2=-12.$$
olduğunu verir.

Benzer şekilde $\iint_R (x-3y^2)\,dA = \int_1^2\int_0^2 (x-3y^2)\,dx\,dy = -12$ olduğunu göstererek çözüme ulaşılabilir.

ÖRNEK. $R=[1,2]\times[0,\pi]$ olmak üzere $\iint_R y\sin(xy)\,dA$ integralini hesaplayınız.

Çözüm 1. Önce x değişkenine göre integral alınırsa,

$$\iint_R y\sin(xy)\,dA = \int_0^\pi\int_1^2 y\sin(xy)\,dx\,dy = \int_0^\pi \Big[-\cos(xy)\Big]_{x=1}^{x=2} dy$$

$$= \int_0^\pi (-\cos 2y+\cos y)\,dy = \Big[-\tfrac{1}{2}\sin 2y+\sin y\Big]_0^\pi = 0$$

elde edilir.

Çözüm 2. İntegral sırası değiştirilirse,

$$\iint_R y\sin(xy)\,dA = \int_1^2\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy\,dx$$

olur.

$\int_0^\pi y\sin(xy)\,dy$ integralini hesaplamak için

$$u=y,\quad dv=\sin(xy)\,dy,\quad du=dy\quad v=-\frac{\cos(xy)}{x}$$

olmak üzere kısmi integrasyon yöntemi uygulanır. Buna göre

(7) (141)

$$\int_0^{\pi} y\sin(xy)\,dy = -\frac{y\cos(xy)}{x}\Bigg|_{y=0}^{y=\pi} + \frac{1}{x}\int_0^{\pi}\cos(xy)\,dy = -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{1}{x^2}\big[\sin xy\big]_{y=0}^{y=\pi}$$

$$= -\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\sin\pi x}{x^2}$$

bulunur.

Şimdi $u=-1/x$, $dv=\pi\cos\pi x\,dx$ ve $du=\frac{1}{x^2}dx$, $v=\sin\pi x$ olmak üzere kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x}\right)dx = -\frac{\sin\pi x}{x} - \int\frac{\sin\pi x}{x^2}\,dx$$

olur. Buna göre $\int\left(-\frac{\pi\cos\pi x}{x} + \frac{\sin\pi x}{x^3}\right)dx = -\frac{\sin\pi x}{x}$ ve

$$\int_1^2\int_0^{\pi} y\sin(xy)\,dy\,dx = \left[-\frac{\sin\pi x}{x}\right]_{x=1}^{x=2} = 0$$

elde edilir.

ÖRNEK. $x^2+2y^2+z=16$ eliptik paraboloidi, $x=2$ düzlemi, $y=2$ düzlemi ve üç koordinat düzlemi ile sınırlanmış S katı cisminin hacmini bulunuz.

Çözüm. S cismi $z=16-x^2-2y^2$ yüzeyinin altında ve $R=[0,2]\times[0,2]$ karesinin üstünde kalan katı cisimdir. Fubini'nin teoremi ile çift katlı integrali hesaplayabiliriz.

$$V=\iint_R (16-x^2-2y^2)\,dA=\int_0^2\int_0^2 (16-x^2-2y^2)\,dx\,dy=\int_0^2\Big[16x-\frac{x^3}{3}-2y^2x\Big]_{x=0}^{x=2} dy$$

$$=\int_0^2\Big(\frac{88}{3}-4y^2\Big)dy=\Big[\frac{88}{3}y-\frac{4}{3}y^3\Big]_0^2=46$$

bulunur. #

NOT. $f(x,y)=g(x)h(y)$ biçiminde $f(x,y)$ sadece x ve sadece y nin fonksiyonu olarak çarpanlara ayrılabiliyorsa, $R=[a,b]\times[c,d]$ olmak üzere R üzerinde f nin çift katlı integrali

$$\iint_R f(x,y)\,dA=\iint_R g(x)h(y)\,dA=\int_a^b g(x)\,dx\int_c^d h(y)\,dy$$

biçiminde daha basit bir şekilde yazılabilir.

ÖRNEK. $R=[0,\pi/2]\times[0,\pi/2]$ ise

$$\iint_R \sin x\cos y\,dA=\Big(\int_0^{\pi/2}\sin x\,dx\Big)\Big(\int_0^{\pi/2}\cos y\,dy\Big)=\Big(-\cos x\Big|_0^{\pi/2}\Big)\cdot\Big(\sin y\Big|_0^{\pi/2}\Big)=1\cdot 1=1$$

olur.

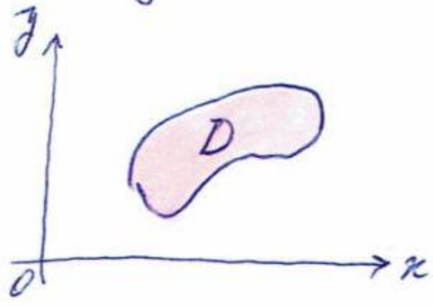
Buradaki $f(x,y)=\sin x\cos y$ fonksiyonu R üzerinde pozitif olduğundan sözkonusu integral R nin üstünde ve f nın grafiğinin altında kalan katı cismin hacmidir.

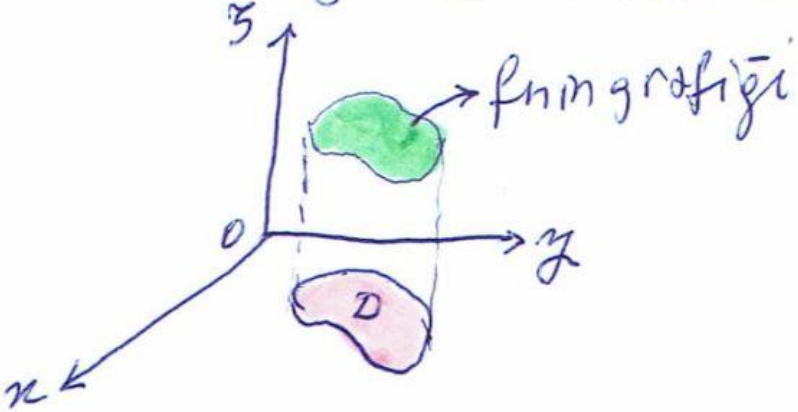
ÖRNEK. $\int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 5} e^{2x-y}\,dx\,dy = \int_0^{\ln 2}\int_0^{\ln 5} e^{2x}\cdot e^{-y}\,dx\,dy = \left(\int_0^{\ln 5} e^{2x}dx\right)\left(\int_0^{\ln 2} e^{-y}dy\right)$

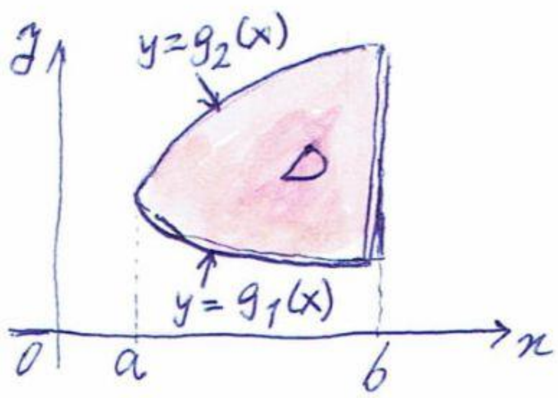
$= \left(\frac{e^{2x}}{2}\Big|_0^{\ln 5}\right)\cdot\left(-e^{-y}\Big|_0^{\ln 2}\right) = \left(\frac{25}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(-\frac{1}{2}+1\right) = 12\cdot\frac{1}{2} = 6.$

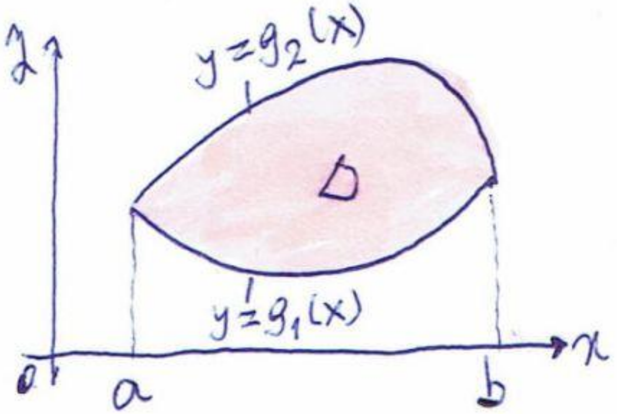
Genel bölgeler üzerinde çift katlı İntegraller.

Çift katlı integraller için, bir fonksiyonun sadece dikdörtgenler üzerinde değil, daha genel bölgeler üzerinde integrali alınabilir.









Eğer f fonksiyonu

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

biçiminde 1. tip D bölgesinde sürekli ise

$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_a^b\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\,dx \quad \text{---} \quad (5)$$

olur.

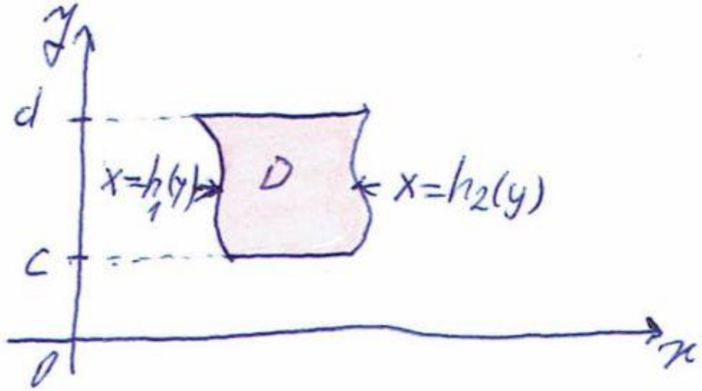
Yine h_1 ve h_2 sürekli fonksiyonlar olduğunda,

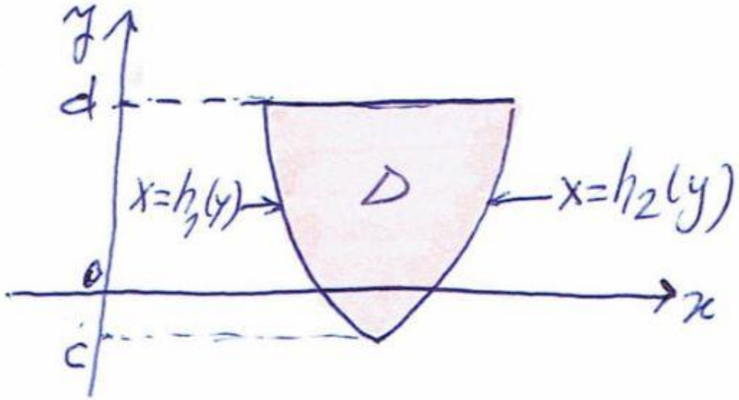
$$D=\{(x,y)\mid c\le y\le d,\ h_1(y)\le x\le h_2(y)\}$$

biçimindeki II. tip düzlemsel bölgeler dikkate alınabilir. ve

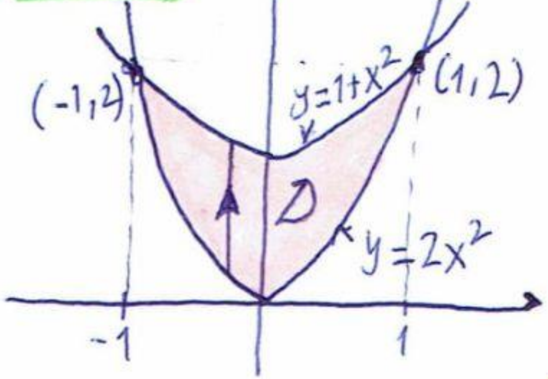
$$\iint_D f(x,y)\,dA=\int_c^d\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)\,dx\,dy \quad \text{---} \quad (6)$$

olur.





ÖRNEK:



Şekildeki D bölgesi I. tip olup,

$$D=\{(x,y) \mid -1\le x\le 1,\ 2x^2\le y\le 1+x^2\}$$

yazılabilir. Alt sınır $y=2x^2$ ve üst sınır $y=1+x^2$ olduğundan

$$\iint_D (x+2y)\,dA=\int_{-1}^{1}\int_{2x^2}^{1+x^2}(x+2y)\,dy\,dx=\int_{-1}^{1}\Big[xy+y^2\Big]_{y=2x^2}^{y=1+x^2}dx$$

$$=\int_{-1}^{1}\Big[x(1+x^2)+(1+x^2)^2-x(2x^2)-(2x^2)^2\Big]dx$$

$$=\int_{-1}^{1}(-3x^4-x^3+2x^2+x+1)\,dx=\Big[-3\frac{x^5}{5}-\frac{x^4}{4}+\frac{2}{3}x^3+\frac{x^2}{2}+x\Big]_{-1}^{1}=\frac{32}{15}$$

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR