Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

ÖRNEK. $f(x,y,z)=6x+3y+2z-3$ fonksiyonunun $S=\{(x,y,z): 4x^2+2y^2+z^2\leq 70\}$ bölgesi üzerindeki ekstremum değerlerini bulunuz.

Çözüm. S bölgesi kapalı ve sınırlı (kompakt) ve f fonksiyonu S üzerinde sürekli olduğundan yan koşullu ekstremumları vardır. f nin S üzerindeki yerel ekstremumları

$$S^0=\{(x,y,z) \mid 4x^2+2y^2+z^2<70\}$$

açık bölgesinde ve

$$\partial S=\{(x,y,z) \mid 4x^2+2y^2+z^2=70\}$$

sınırında araştırılacaktır.

f nin S^0 üzerinde kısmi türevler var ve $\nabla f=(6,3,2)\neq 0$ olduğundan S^0 üzerinde ekstremumları yoktur.

Şimdi f nin ∂S üzerindeki ekstremumlarını, yani $g(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-70=0$ yan koşuluna göre yerel ekstremumlarını araştıralım. Bunun için

$$L(x,y,z,\lambda) = 6x + 3y + 2z - \cancel{5} + \lambda(4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70)$$

Lagrange fonksiyonunun $\nabla f(P_0)$ kritik noktalarını bulmalıyız.

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 6 + 8\lambda x = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = 3 + 4\lambda y = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial z} = 2 + 2\lambda z = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 4x^2 + 2y^2 + z^2 - 70 = 0$$

denklemleri veya

$$6 = -8\lambda x, \quad 3 = -4\lambda y, \quad 2 = -2\lambda z \quad \text{ve} \quad 4x^2 + 2y^2 + z^2 = 70.$$

denklemleri bulunur. İlk üç denklemden bulunan

$$x = -\frac{3}{4\lambda}, \quad y = -\frac{3}{4\lambda} \quad \text{ve} \quad z = -\frac{1}{\lambda}$$

değerleri son denklemde yerine konursa,

$$4\left(\frac{3}{4\lambda}\right)^2 + 2\left(\frac{3}{4\lambda}\right)^2 + \left(\frac{1}{\lambda}\right)^2 = 0 \Rightarrow \frac{35}{8}\lambda^{-2} = 70$$

ve $\lambda = \pm \frac{1}{4}$ bulunur.

$\lambda = 1/4$ için $x=-3$, $y=-3$, $z=-4$ ve $\lambda=-1/4$ için $x=3$, $y=3$, $z=4$ olur.

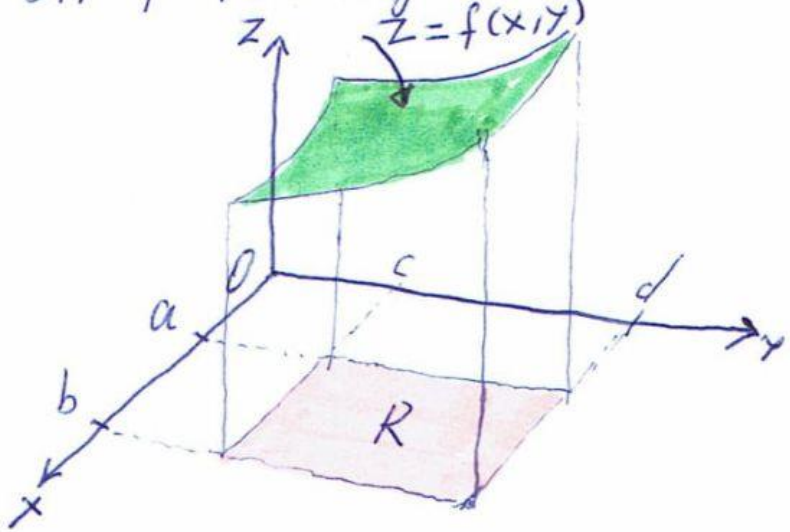
O halde $f(x,y,z)=6x+3y+2z-5$ fonksiyonunun $g(x,y,z)=4x^2+2y^2+z^2-70=0$ yan koşuluna göre ekstremum değerlerini $(-3,-3,-4)$ ve $(3,3,4)$ noktalarında almak zorundadır.

$f(3,3,4)=30$ ve $f(-3,-3,-4)=-40$ olduğuna göre f nin S üzerindeki maksimum değeri 30, minimum değeri ise -40 tır.

Çift Katlı İntegraller.

$$R=[a,b]\times[c,d]=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid a\le x\le b,\ c\le x\le d\}$$

kapalı dikdörtgeni üzerinde tanımlı iki değişkenli bir f fonksiyonunu dikkate alalım, önce $f(x,y)\ge 0$ varsayalım.



f nın grafiği denklemi $z=f(x,y)$ olan bir yüzeydir.

S, R nın üzerinde ve f nın grafiğinin altında kalan katı cisim, yani

$$S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \mid 0\le z\le f(x,y),\ (x,y)\in R\}$$

olsun. S nın hacmi, yani $f(x,y)\ge 0$ ise R dikdörtgenin üstünde ve $z=f(x,y)$ yüzeyinin altında kalan katı cismin hacmi

$$V=\iint_R f(x,y)\,dA$$

olur.

Ardışık İntegraller.

Bu kesimde çift katlı integralin iki tane tek katlı integralin hesaplanmasıyla bulunabilen bir ardışık integral olarak nasıl ifade edileceğini göreceğiz.

f, $R=[a,b]\times[c,d]$ dikdörtgeni üzerinde sürekli, iki değişkenli bir fonksiyon olsun.

$$\int_c^d f(x,y)\,dy$$

gösterimi x sabit tutulurken $f(x,y)$ nin $y=c$ den $y=d$ ye y değişkenine göre integralini ifade eder. Bu işleme
y " " 'kısmi integral' denir.

Bu durumda $\int_c^d f(x,y)\,dy$ değeri x değişkenine bağlı bir fonksiyondur:

$$A(x)=\int_c^d f(x,y)\,dy$$

Bu A fonksiyonunun $x=a$ dan $x=b$ ye x değişkenine göre integrali alınırsa,

(135)

$$\int_a^b A(x)\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx \quad \ldots \quad (1)$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağındaki integral 'ardışık integral' diye adlandırılır. Genelde

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy \right] dx \quad \ldots \quad (2)$$

yazılır.

Benzer şekilde

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dx\,dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x,y)\,dx \right] dy \quad \ldots \quad (3)$$

ardışık integrali, önce x değişkenine göre (y sabit tutulup) a dan b ye integral alınması ve daha sonra y nin bir fonksiyonunun y değişkenine göre y=c den y=d ye integralinin alınması anlamına gelir.

Hem (2) hemde (3) eşitliklerinde integral alma işleminin içeriden dışarıya doğru hesaplandığına dikkat ediniz.

ÖRNEK. Verilen ardışık integralleri hesaplayınız.

$$(a)\ \int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx \qquad (b)\ \int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy$$

Çözüm. (a) x sabit tutulup

$$\int_1^2 x^2y\,dy = x^2\frac{y^2}{2}\Big|_1^2 = x^2\left(\frac{2^2}{2}\right) - x^2\left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{3}{2}x^2$$

bulunur. Böylece $A(x)=\frac{3}{2}x^2$ olmaktadır. x değişkeninin bu $A(x)$ fonksiyonunun 0 dan 3 e integrali alınarak

$$\int_0^3\int_1^2 x^2y\,dy\,dx = \int_0^3\left[\int_1^2 x^2y\,dy\right]dx = \int_0^3\frac{3}{2}x^2\,dx = \frac{x^3}{2}\Big|_0^3 = \frac{27}{2}$$

sonucuna ulaşılır.

$$(b)\ \int_1^2\int_0^3 x^2y\,dx\,dy = \int_1^2\left[\int_0^3 x^2y\,dx\right]dy = \int_1^2\left[\frac{x^3}{3}y\right]_0^3 dy = \int_1^2 9y\,dy = \frac{9y^2}{2}\Big|_1^2 = \frac{27}{2}$$

çıkar. Önce x sonra y değişkenine göre integral aldık.

Bu örnekte x ve y değişkenlerinin sırası değiştiğinde integrallerin değerlerinin değişmediğini görüyoruz.

Genelde (2) ve (3) eşitliklerindeki ardışık integraller eşit olur, yani integral alma sırası önemsizdir.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR