Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Ekstremum Değerler

TANIM. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(1) $\forall x \in B(a,r)$ için $f(a) \leq f(x)$ olacak şekilde bir $r>0$ varsa, $f(a)$ değerine f nin 'yerel (lokal) minimum değeri' denir.

(2) $\forall x \in B(a,r)$ için $f(a) \geq f(x)$ olacak şekilde bir $r>0$ varsa, $f(a)$ değerine f nin 'yerel maksimum değeri' denir.

(3) Eğer $f(a)$ değeri yerel minimum ya da yerel maksimum değer ise, $f(a)$ değerine 'yerel ekstremum değer' denir.

UYARI. Bir fonksiyon yerel ekstremum değere sahip olmayabilir. Örneğin $f:(0,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x$ fonksiyonunun yerel ekstremum değeri yoktur.

Tek-değişkenli reel-değerli bir fonksiyon bir yerel ekstremuma sahip olduğu noktada türevli ise, bu türevin değerinin 0 olduğu biliniyor (Fermat teoremi).

28. Teorem. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f : V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer a noktasında f nin tüm kısmi türevleri var ve $f(a)$ yerel ekstremum değer ise, o zaman $\nabla f(a) = 0$ dır.

İspat. $a = (a_1, \dots, a_n)$ olsun. Hipoteze göre her $j = 1, \dots, n$ için tek-değişkenli

$$g'(t) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(t)$$

$$g(t) \doteq f(a_1, \dots, a_{j-1}, t, a_{j+1}, \dots, a_n)$$

fonksiyonu $t = a_j$ noktasında yerel ekstremuma sahip ve $g'(a_j) = \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)$ türevi var olduğundan Fermat teoremi gereğince $\frac{\partial f}{\partial x_j}(a) = g'(a_j) = 0$, yani $\nabla f(a) = 0$ olmalıdır.

NOT. Son teoreme göre $f(a)$ değeri f nin bir yerel ekstremum değeri ise, ya $\nabla f(a)$ gradyeni tanımlı değildir ya da $\nabla f(a)$ tanımlı ise $\nabla f(a)=0$ dır.

Yine $\nabla f(a)=0$ olması $f(a)$ değerinin yerel ekstremum değer olması için gerekli, ama yeterli değildir.

ÖRNEK. $\forall (x,y)\in \mathbb{R}^2$ için $f(x,y)=y^2-x^2$ fonksiyonunun yerel ekstremum değerlerini araştıralım:

f fonksiyonu C^∞- sınıfından, yani $f\in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ olduğu açıktır, yine

$$\nabla f(0,0)=\big(f_x(0,0),\, f_y(0,0)\big)=(-2\cdot 0,\; 2\cdot 0)=(0,0)$$

dır. Öte yandan her $x\in\mathbb{R}$ için $f(x,0)=-x^2\le 0=f(0,0)$ ve her $y\in\mathbb{R}$ için $f(0,y)=y^2\ge 0=f(0,0)$ olup, $f(0,0)$ değeri f nin bir yerel ekstremum değeri değildir.

Bu ve benzeri örneklerdeki bir noktanın komşuluğunda fonksiyonun davranışı şu tanıma yol açar:

TANIM. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu a noktasında dif. bilir olsun. Eğer $\nabla f(a) = 0$ ise ve bir $r_0 > 0$ sayısı için $0 < r < r_0$ olmak üzere her r sayısına karşılık

$$f(x) < f(a) < f(y)$$

olacak şekilde $x, y \in B(a, r)$ bulunabiliyorsa, a noktasına f nin bir 'eyer noktası' denir. #

29. Teorem. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f nin ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri a noktasında var ve her $h \neq 0$ için $D^{(2)} f(a; h) > 0$ ise, o zaman her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$D^{(2)} f(a; x) \geq m \|x\|^2 \qquad (*)$$

olacak şekilde bir $m > 0$ vardır.

İspat. $K = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| = 1\}$ olsun ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için

(108)

$$g(x) = D^{(2)}f(a;x) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(a)\, x_j \cdot x_k$$

olmak üzere bir $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tanımlansın.

Hipoteze göre g fonku $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ve dolayısıyla K üzerinde sürekliidir. ve pozitif değerler alır.

K kompakt olduğundan, ekstremum değer teoremi gereğince g fonksiyonu ~~K~~ üzerinde bir $m>0$ minimum değerine sahip olur.

$(*)$ eşitsizliği $x=0$ için gerçekleşir ve $x \neq 0$ için $x/\|x\| \in$ ~~K~~ olup, buna göre g nin tanımını kullanarak

$$D^{(2)}f(a;x) = \frac{g(x)}{\|x\|^2} \cdot \|x\|^2 = g\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \cdot \|x\|^2 \geq m\|x\|^2 \quad (g \text{ lineer})$$

elde edilir. O halde her $x \in \mathbb{R}^n$ için $(*)$ doğrudur.

79. Teorem (İkinci Türev Testi). $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f : V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için $\nabla f(a) = 0$ olsun. Yine f nin V üzerinde tüm ikinci mertebeden türevleri var ve

ve a noktasında sürekli olsun. Aşağıdaki özellikler gerçekleşir:

(1) Eğer $\forall h \neq 0$ için $D^{(2)} f(a;h) > 0$ ise, o zaman $f(a)$ değeri f nin bir yerel minimum değeridir.

(2) Eğer $\forall h \neq 0$ için $D^{(2)} f(a;h) < 0$ ise, o zaman $f(a)$ değeri f nin bir yerel maksimum değeridir.

(3) Eğer $D^{(2)} f(a;h)$ tam diferansiyeli $h \in \mathbb{R}^n$ değerleri için hem negatif hemde pozitif değerler alıyorsa, a noktası f nin bir eyer noktasıdır.

İspat. V nin açık olmasını kullanarak $B(a,r) \subset V$ olacak şekilde bir $r > 0$ alınsın. Bir $\varepsilon : B(0,r) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

$$\varepsilon(h) = \begin{cases} \left[f(a+h) - f(a) - \frac{1}{2} D^{(2)}(f;h)\right] / \|h\|^2, & h \neq 0 \\ 0, & h = 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Her $h \neq 0$ için

$$f(a+h) - f(a) = \frac{1}{2} D^{(2)} f(a;h) + \|h\|^2 \varepsilon(h)$$

yazılabilir.

Eğer $h=(h_1,\dots,h_n)\in B(0,r)$ noktası sabitlenirse, $\nabla f(a)=0$ hipotezi dikkate alınarak, Taylor formülünden dolayı

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}D^{(2)}f(c;h)$$

olacak şekilde bir $c\in L(a;a+h)$ vardır, dolayısıyla

$$f(a+h)-f(a)-\frac{1}{2}D^{(2)}f(a;h)=\frac{1}{2}\left(D^{(2)}f(c;h)-D^{(2)}f(a;h)\right)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(c)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(a)\right)h_j h_k$$

olur. Bu durumda $|h_j h_k|\le \|h\|^2$ olmasından

$$0\le|\varepsilon(h)|=\frac{|f(a+h)-f(a)-\frac{1}{2}D^{(2)}f(a;h)|}{\|h\|}\le\frac{1}{2}\left(\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(c)-\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_k}(a)\right|\right.$$

olup, $h\to 0$ iken f nin ikinci mertebeden kısmi türevlerinin a noktasında sürekli olması hipotezi gereğince sağ yan sıfıra yaklaşır. Bu $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ olmasına yol açar.

(1) Eğer her $h\neq 0$ için $D^2 f(a;h)>0$ ise önceki teoreme göre bir $m>0$ için $h\in B(0,r)$ olmak üzere

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}D^2 f(a;h)+\|h\|^2\varepsilon(h)\geq \|h\|^2\left(\frac{1}{2}m+\varepsilon(h)\right)$$

olur. $\lim_{h\to 0}\varepsilon(h)=0$ olmasından yeterince küçük h vektörleri için $f(a+h)-f(a)>0$ olması demektir, dolayısıyla $f(a)$ yerel minimum değerdir.

(2) Eğer her $h\neq 0$ için $D^2 f(a;h)<0$ ise $f(a)$ değerinin f nin bir yerel maksimum değeri olduğu elde edilebilir.

(3) $h\in R^n$ sabitlenip, her $t\in\mathbb{R}$ için

$$f(a+h)-f(a)=\frac{1}{2}D^{(2)}f(a;th)+\|th\|^2\varepsilon(th)=\frac{1}{2}t^2\left(D^{(2)}f(a;h)+\|h\|^2\varepsilon(th)\right)$$

yazılır. $t\to 0$ iken $\varepsilon(th)\to 0$ olduğundan, yeterince küçük t sayıları için, $f(a+th)-f(a)$ ve $D^2 f(a;h)$ tam diferansiyeli h değişirken hem negatif hemde pozitif değerler alıyorsa, a noktasıda f nin eyer noktası olur.

NOT. Genel olarak $D^{(2)}f(a;h)$ tam diferansiyelinin işaretini belirlemek zor bir iştir. $\mathbb{R}^2$ üzerinde tanımlı fonksiyonlar için $D^{(2)}f(a;h)$ tam diferansiyeli bir kuadratik formdur, yani $A,B,C\in\mathbb{R}$ olmak üzere $Ah^2+Bhk+Ck^2$ biçimindedir. Kuadratik formların işaretleri ise determinantları denen

$$D=B^2-AC$$

değeri yardımıyla aşağıdaki teoremdeki gibi belirlenir.

34. Teorem. $A,B,C\in\mathbb{R}$ ve $D=B^2-AC$ ve

$$\phi(h,k)=Ah^2+2Bhk+Ck^2$$

ise, o zaman

(1) eğer $D<0$ ise, A ve $\phi(h,k)$, $((h,k)\neq 0$ o.ü$)$ aynı işarettedir;

(2) eğer $D>0$ ise, değişen $(h,k)\in\mathbb{R}^2$ ikilileri için $\phi(h,k)$ hem negatif hemde pozitif değerler alır.

İspat. (1) $D<0$ olsun. O zaman $A\neq 0$ dır ve $A\phi(h,k)$ ifadesi

$$A\phi(h,k) = A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2 = (Ah+Bk)^2 - B^2k^2 + ACk^2$$
$$= (Ah+Bk)^2 + |D|k^2$$

biçiminde bir iki kare toplamı olur.

$A\neq 0$, $D\neq 0$ olduğundan her $(h,k)\neq(0,0)$ için bu iki kare sayının en az biri pozitif olmalıdır. Buna göre $(h,k)\neq(0,0)$ için $\phi(h,k)$ ve A aynı işaretlidir.

(2) $D>0$ olsun. O zaman ya $A\neq 0$ ya da $B\neq 0$ dır. Eğer $A\neq 0$ ise

$$A\phi(h,k) = A^2h^2 + 2ABhk + ACk^2 = (Ah+Bk)^2 + Dk^2$$
$$= (Ah+Bk-\sqrt{D}k)(Ah+Bk+\sqrt{D}k)$$

olur.

$Ah+Bk-\sqrt{D}k=0$ ve $Ah+Bk+\sqrt{D}k=0$ doğruları hk-düzlemini dört açık bölgeye ayırdığından ve $A\phi(h,k)$ ifadesi bu bölgelerin ikisinin üzerinde pozitif ve diğer ikisinin üzerinde negatif olduğundan, (h,k) ikilisi $\mathbb{R}^2$ üzerinde değiştiğinde $\phi(h,k)$ hem negatif hem de pozitif değerler

Eğer $A=0$ ve $B\neq 0$ ise,

$$\phi(h,k)=2Bhk+Ck^2=(2Bh+Ck)k$$

olur. $B\neq 0$ olduğundan,

$$2Bh+Ck=0 \text{ ve } k=0$$

doğruları hk-düzlemini dört açık bölgeye ayırır. O zaman önceki durum gibi (h,k) ikilileri $\mathbb{R}^2$ üzerinde değiştiğinde $\phi(h,k)$ ifadesi hem negatif hemde pozitif değerler almalıdır. #

SONUÇ. $V\subset\mathbb{R}^2$ bir açık altküme, $(a,b)\in V$ ve $f:V\to\mathbb{R}$ fonksiyonu için $\nabla(a,b)=0$ olsun. Yine f nin ikinci mertebeden tüm kısmi türevleri V üzerinde var ve (a,b) noktasında sürekli olsun. Ayrıca

$$D=f_{xy}^2(a,b)-f_{xx}(a,b).f_{yy}(a,b)$$

verilsin. O zaman

(1) Eğer $D<0$ ve $f_{xx}(a,b)>0$ ise, $f(a,b)$ değeri f nin bir

yerel minimum değeridir.

(2) Eğer $D<0$ ve $f_{xx}(a,b)<0$ ise, $f(a,b)$ değeri f nin bir yerel maksimum değeridir.

(3) Eğer $D>0$ ise (a,b) noktası f nin bir eyer noktasıdır.

İspat. $A=f_{xx}(a,b)$, $B=f_{xy}(a,b)$ ve $C=f_{yy}(a,b)$ olsun, İkinci türev testi ve son teoreme göre istenen hemen elde edilir.

NOT. $D=0$ olduğunda son sonuç bir bilgi vermez.

ÖRNEK. $f(x,y)=x^2+2xy-2y^2+3x+4$ fonksiyonunun yerel ekstremum noktalarını araştıralım:

$$\left.\begin{aligned} f_x(x,y) &= 2x+2y+3=0 \\ f_y(x,y) &= 2x-4y \quad =0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow 6y+3=0,\ y=-1/2 \wedge x=-1.$$

$(a,b)=(-1,-1/2)$ noktasında $\nabla f(-1,-1/2)=0$ olur.

$f_{xx}(x,y)=2$, $f_{xy}(x,y)=2$, $f_{yy}(x,y)=-4$ olduğundan

$$D=f_{xy}^2(-1,-1/2)-f_{xx}(-1,-1/2)\cdot f_{yy}(-1,-1/2)=(2)^2-(2)(-4)=12>0 \text{ dır.}$$

(114)

O halde $(-1,-1/2)$ noktası f nin bir eyer noktasıdır.

ÖRNEK. $f(x,y)=\frac{1}{3}y^3+x^2y-2x^2-2y^2+6$ fonksiyonunun yerel ekstremumlarını araştıralım:

$$f_x(x,y)=2xy-4x=0$$

$$f_y(x,y)=y^2+x^2-4y=0.$$

$x=0$ ise $f_x(0,y)=0$ ve $f_y(0,y)=y^2-4y=y(y-4)=0$ olduğundan $y=0 \vee y=4$ olur.

Yani $\nabla f(0,0)=\nabla f(0,4)=0$ olur.

$x\neq 0$ ise $f_x(x,y)=2xy-4x=0$ dan $y=2$ ve $f_y(x,2)=2^2+x^2-4(2)$
$=4+x^2-8=x^2-4=(x-2)(x+2)=0$ olmasından $x=-2 \vee x=2$ olur.

Yani $\nabla(-2,2)=\nabla(2,2)=0$ olur.

Böylece yerel ekstremum olmaya aday noktalar, diğer bir deyişle kritik noktalar $(0,0),(0,4),(-2,2)$ ve $(2,2)$ noktalarıdır.

$f_{xy}(x,y) = 2x$, $f_{xx}(x,y) = 2y-4$, $f_{yy}(x,y) = 2y-4$

$(0,0)$ için $D = f_{xy}^2(0,0) - f_{xx}(0,0)\, f_{yy}(0,0) = 0-(-4)\cdot(-4) = -16 < 0$
ve $f_{xx}(0,0) = -4 < 0$ olduğundan $f(0,0) = 6$ yerel maksimum değer olur.

$(0,4)$ için $D = f_{xy}^2(0,4) - f_{xx}(0,4)\, f_{yy}(0,4) = (0)^2 - (+4)(+4) = -16 < 0$
ve $f_{xx}(0,4) = 4 > 0$ olduğundan $f(0,4) = \frac{64}{3} + (0)^2(4) - 2(0)^2 - 2(4)^2 + 6 = -\frac{14}{3}$
yerel minimum değer olur.

$(2,2)$ için $D = (4)^2 - (0)(0) = 16 > 0$ ve $(-2,+2)$ için $D = (-4)^2 - (0)\cdot(0) = 16 > 0$
olduğundan $(2,2)$ ve $(2,-2)$ noktaları birer eyer noktasıdır.

TANIM. $V \subset \mathbb{R}^n$, $a \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun.

(1) Eğer her $x \in V$ için $f(a) \leq f(x)$ ise, $f(a)$ değerine f nin bir 'mutlak minimum' değeri denir.

(2) Eğer her $x \in V$ için $f(a) \geq f(x)$ ise, $f(a)$ değerine f nin bir 'mutlak maksimum' değeri denir.

(3) Eğer $f(a)$ değeri bir mutlak minimum ya da mutlak maksimum değeri ise, $f(a)$ değerine f nin 'mutlak ekstremum' değeri denir.

NOT. Bir mutlak ekstremum değer, bir yerel ekstremum değerdir. Bunun tersi genelde doğru değildir.

Örneğin $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 3x - x^3$ fonksiyonu için $f'(x) = 3 - 3x^2$ ve $f''(x) = -6x$ olup, $f'(x) = 0$ ise $x = -1 \vee x = 1$ dir, yine $f''(-1) = 6 > 0$, $f''(1) = -6 < 0$ olduğundan $f(-1) = -2$ yerel minimum değeri, $f(1) = 2$ yerel maksimum değeridir, ama $f(-1) = -2$ ile $f(1) = 2$ mutlak ekstremum değer değildir.

Ekstremum değer teoremi gereğince, $K \neq \emptyset$, $K \subset \mathbb{R}^n$ olmak üzere bir K kompakt alt kümesi üzerinde sürekli $f: K \to R$ fonksiyonunun mutlak ekstremum değerleri vardır. Yani $a, b \in K$ olmak üzere

$$f(a) = maks\{f(x) \mid x \in K\} \text{ ve } f(b) = min\{f(x) \mid x \in K\}$$

dır.

Mutlak Ekstremumların Bulunması:

$K \subset \mathbb{R}^2$ kompakt (kapalı ve sınırlı) bir alt küme ve $f \in C^1(K)$ olsun. f fonksiyonu K üzerinde mutlak ekstremum değerlerini alır.

Yine f nin K^0 üzerinde ekstrumum değerleri varsa $\nabla f = 0$, yani

$$f_x(x,y) = 0$$
$$f_y(x,y) = 0$$

denklem sisteminin çözümleri arasındadır. Buna göre f nin K üzerindeki ekstremumlarını bulmak için genel yöntem söyledir:

1- f nin K^0 kümesindeki kritik noktaları ($\nabla f(a) = 0$ olan a noktaları) bulunur.

2- f nin ∂K sınırı üzerindeki ekstremum noktaları bulunur.

3- İlk iki adımda bulunan noktalardaki fonksiyon değerleri hesaplanır.

Bu değerlerin en küçük olanı mutlak minimum değer, en büyük olanı ise mutlak maksimum değer olur.

ÖRNEK. $f(x,y)=x^2+y^2-2x-2y+4$ fonksiyonunun $S=\{(x,y) \mid x^2+y^2\le 4\}$ kapalı diski üzerindeki mutlak ekstremumlarını belirleyiniz.

Çözüm. S kapalı ve sınırlı, dolayısıyla kompakttır. f iki değişkenli bir polinom olduğu için süreklidir. O zaman f fonksiyonu S üzerinde mutlak ekstremum değerlerini alır.

$\nabla f(x,y)=(f_x(x,y), f_y(x,y))=(2x-2, 2y-2)=(0,0) \Leftrightarrow x=1, y=1$. olduğundan (1,1) noktası f nin bir kritik noktasıdır, f fonksiyonu S° üzerinde dif. bilir olduğundan, (1,1) buradaki tek kritik noktadır.

f nin $\partial S=\{(x,y) \mid x^2+y^2=4\}$ sınırı üzerindeki ekstremumlarına bakalım.

∂S nin bir parametrizasyonu

$$r(\theta)=(2\cos\theta, 2\sin\theta), \quad 0\le\theta\le 2\pi$$

dir. f nin ∂S üzerindeki değerleri

$$F(\theta)=f(r(\theta))=4\cos^2\theta+4\sin^2\theta-4\cos\theta-4\sin\theta+4$$
$$=8-4\cos\theta-4\sin\theta$$

ile verilebilir.

Bu F fonksiyonu $[0,2\pi]$ kapalı ve sınırlı aralığında (kompakt kümesi) üzerinde sürekli olduğundan mutlak ekstremum değerlerini alır. F nin kritik noktaları

$$F'(\theta) = 4\sin t - 4\cos t = 0 \Leftrightarrow \tan\theta = 1$$

olduğundan, $t=\pi/4$ ve $t=5\pi/4$ noktalarıdır. Buna göre F nin $[0,2\pi]$ üzerindeki ekstremum değerleri $F'(t)=0$ olan iç noktalar ve $0, 2\pi$ uç noktalarındaki

$$F(0) = F(2\pi) = f(2,0) = 4\ ;\ F\left(\tfrac{\pi}{4}\right) = f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 8-4\sqrt{2}\ ;\ F\left(\tfrac{5\pi}{4}\right) = f(-\sqrt{2},-\sqrt{2}) = 8+4\sqrt{2}$$

değerleri içinden seçilir.

f nin ∂S sınırındaki bu noktalardaki ve (1,1) kritik noktasındaki değerlerini listeleyelim:

$$f(1,1)=2,\ f(2,0)=4,\ f(\sqrt{2},\sqrt{2}) = 8-4\sqrt{2},\ f(-\sqrt{2},\sqrt{2}) = 8+4\sqrt{2}.$$

f nin S üzerindeki mutlak maksimum değeri, bu değerlerin en büyüğü olan $8+\sqrt{2}$ ve mutlak minimum değeri, ise bu değerlerin en küçüğü olan 2 dir.

Yan Koşullu Ekstremumlar ve Lagrange Yöntemi.

Bazen $f(x,y)$ veya $f(x,y,z)$ fonksiyonlarının yerel ekstremumlarının incelenmesinde buradaki değişkenler üzerine başka koşullar yüklenir. Örneğin iki değişkenli $f(x,y)$ fonksiyonlarının ekstremumları, x ve y değişkenlerinin

$$g_1(x,y)=0 \quad v \quad g_1(x,y)\leq M$$

koşullarını sağlaması istenebilir. $f(x,y)$ nin bu tür ekstremumlarına 'yan koşullu' ekstremumlar denir.

Daha açık olarak $g_1(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-1=0$ gibi bir yüzey ele alındığında

$$\{f(x,y,z) \mid g_1(x,y,z)=0\}$$

kümesinin ekstremumları ($g_1(x,y,z)=0$ koşulu altında $f(x,y,z)$ nin ekstremumları) yan koşullu ekstremumları olur. Dahası $g_2(x,y,z)=0$ gibi ikinci bir koşul altında ekstremumlar değerlendirilebilir.

ÖRNEK. Çevre uzunluğu 12 birim olan maksimum alana sahip, dikdörtgenin kenar uzunlukları bulunuz.

Çözüm. Dikdörtgenin kenar uzunlukları x ve y olsun. O zaman alanı $x.y$ ve çevresi de $2x+2y$ dır.

Buna göre $f(x,y)=x.y$ fonksiyonunun $g(x,y)=2x+2y-12=0$ yan koşulu altında maksimumunu bulmayı istiyoruz.

x ve y uzunluğu temsil ettiğinden $x>0$, $y>0$ dır, dolayısıyla f ve g fonksiyonlarının tanım kümesi 1. dörtlük, yani $\{(x,y) \mid x>0, y>0\}$ dır.

$g(x,y,z)=2x+2y-12=0$ koşulunun 1. dörtlükteki grafiği C eğrisi ise bu eğri $(0,6)$ ve $(6,0)$ noktalarını birleştiren doğru parçasıdır. $f(x,y)$ nin bu doğru parçası üzerindeki noktalarda maksimum değeri istediğimiz şeydir.

$2x+2y-12=0$ ise $y=6-x$ olup, bu y değeri $f(x,y)=xy$ de yerine konursa,

$$f(x)=x(6-x)$$

tek değişkenli fonksiyonu bulunur.

$f'(x) = 6 - 2x = 0$ dan $x = 3$. ve $2x + 2y = 12$ den $y = 3$ çıkar. O halde istenen dikdörtgen kenar uzunlukları 3 birim olan karedir. #

32. Teorem. $V \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme, $f \in C^1(V)$, $g \in C^1(V)$ ve $C = \{(x,y) \mid g(x,y) = 0\}$ olsun. $P_0 = (x_0, y_0) \in C$ ve $\nabla g(P_0) \neq 0$ olmak üzere f nin C ye kısıtlanışının ($f|_C$ nin), P_0 noktasında yerel ekstremumu varsa (yani f nin P_0 noktasında yan koşullu ekstremumu varsa), P_0 noktasında

$$\nabla f(P_0) + \lambda_0 \nabla g(P_0) = 0 \quad \big((f_x(P_0), f_y(P_0)) + \lambda_0 (g_x(P_0), g_y(P_0)) = 0\big)$$

olacak şekilde bir λ_0 sabiti vardır (yani $L(x, y, \lambda) = f(x,y) + \lambda g(x,y)$ olmak üzere $\nabla L(x_0, y_0, \lambda_0) = 0$ olacak şekilde bir $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ vardır).

İspat. Geometrik olarak $\nabla g(P_0)$ gradyen vektörü C eğrisinin $P_0 = (x_0, y_0)$ noktasındaki $r'(t_0)$ teğetine diktir. $f|_C$ nin P_0 noktasında ekstremumu $f(r(t))$ nin $t = t_0$ noktasında ekstremumu olduğundan zincir kuralına göre

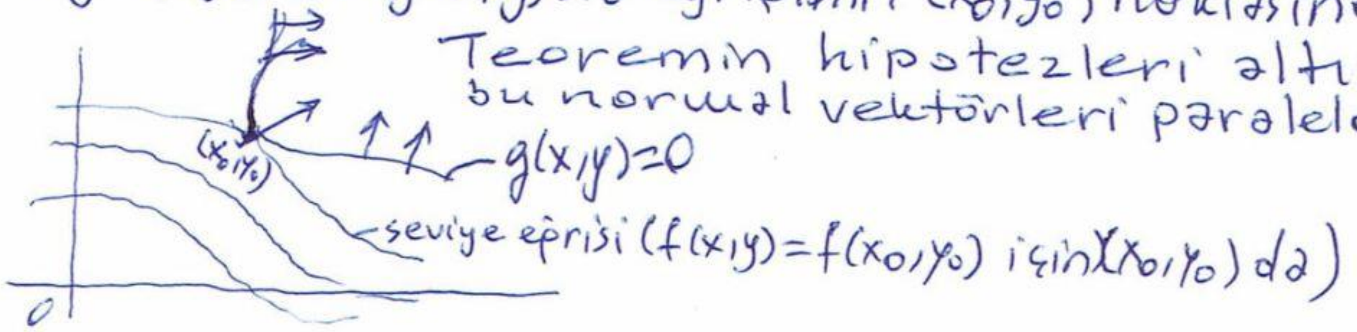
$$0 = \frac{d}{dt} f(r(t))\Big|_{t=t_0} = \nabla f(x_0,y_0) \cdot r'(t_0)$$

dır. O halde $\nabla f(P_0)$ gradyen vektörü, P_0 noktasında $r'(t_0)$ teğet vektörüne diktir, dolayısıyla $\nabla f(P_0)$ ve $\nabla g(P_0)$ vektörleri paraleldir. $\nabla g(P_0) \neq 0$ olduğundan $\nabla f(P_0) = -\lambda_0 \nabla g(P_0)$ olacak şekilde bir λ_0 sabiti vardır. #

Üç değişkenli bir $L(x,y,\lambda)$ fonksiyonuna 'Lagrange fonksiyonu', λ değişkenine de 'Lagrange çarpanı' denir.

Son teoremin basit bir geometrik yorumu vardır. $\nabla f(x_0,y_0)$ gradyen vektörü $f(x,y) = f(x_0,y_0)$ seviye eğrisinin ($f(x,y) = f(x_0,y_0)$ eğrisinin xy-düzlemine dik izdüşümü) (x_0,y_0) noktasındaki normali ve $\nabla g(x_0,y_0)$ ise $g(x,y)=0$ eğrisinin (x_0,y_0) noktasındaki normalidir.

Teoremin hipotezleri altında bu normal vektörleri paraleldir.



(124)

Son teorem $f(x,y)$ fonksiyonunun $g(x,y)=0$ koşuluna göre koşullu ekstremumlarını bulmak için bize bir yöntem önerir. Bu yönteme 'Lagrange çarpım yöntemi' denir. Buna göre

$$\left\{\begin{aligned} \nabla f + \lambda \nabla g = 0 \\ g(x,y) = 0 \end{aligned}\right\}$$

yani $\nabla L(x,y,\lambda)=0$ denkleminin veya denk olarak

$$\left\{\begin{aligned} L_x(x,y,\lambda) &= f_x(x,y) + \lambda g_x(x,y) = 0 \\ L_y(x,y,\lambda) &= f_y(x,y) + \lambda g_\lambda(x,y) = 0 \\ L_\lambda(x,y,\lambda) &= g(x,y) \qquad\qquad = 0 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin (x_0, y_0, λ_0) çözüm noktaları bulunmalıdır.

$\nabla f(x,y) + \lambda \quad g(x,y) = 0$ denkleminin çözümleri, yani $L(x,y,\lambda)$ Lagrange fonksiyonunun kritik noktaları birden çok ise L nin bir (x_0, y_0, λ_0) kritik noktası için (x_0, y_0) noktasında $f(x,y)$ nin değerleri hesaplanmalıdır.

Bu değerlerin en büyüğü koşullu maksimum, en küçüğü koşullu minimumdur.

ÖRNEK. Çevre uzunluğu 12 birim olan maksimum alana sahip dikdörtgenin kenar uzunluğunu birde Lagrange çarpım yöntemi ile çözelim:

Dikdörtgenin kenar uzunlukları: x ve y.
Alan: xy.
Çevre: $2x+2y$.

$f(x,y)=xy$ fonksiyonunun $g(x,y)=2x+2y-12=0$ yan koşuluna göre maksimumu bulunacak.

$2x+2y-12=0$ doğrusunun birinci dörtlükteki grafiği C olsun ($x>0, y>0$).

Bu C eğrisi $(0,6)$ ve $(6,0)$ noktalarını birleştiren, ama bu noktaları içermeyen doğru parçasıdır.

Problemi Lagrange çarpım yöntemi ile çözmek için

$$L(x,y,\lambda)=xy+\lambda(2x+2y-12)$$

olmak üzere $\nabla L(x,y,\lambda)=0$ denkleminin köklerini, yani

(128)

$$\left\{\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial L}{\partial x} = y + 2\lambda \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2\lambda \\ 0 &= \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 2x + 2y - 12 \end{aligned}\right\}$$

denklem sisteminin (x_0, y_0, λ_0) çözümünü bulur.

Birinci ve ikinci denklemden λ nın yok edilmesiyle $x = y$ bulunur. O zaman üçüncü denklemden $4x = 12$ ve $x = 3$ elde edilir. Buna göre $x = y = 3$ ve $\lambda = -3/2$ olur.

Şu halde çözüm $(3, 3, -3/2)$ olup, maksimum alana sahip dikdörtgenin alanı $f(3,3) = 3^2 = 9$ çıkar.

Ayrıca $f(x,y) = xy$ nin yan koşullu maksimuma sahip olduğu $(3,3)$ noktasındaki $xy = 9$ seviye eğrisi (özel olarak hiperbolü) bu noktada $2x + 2y - 12 = 0$ doğrusuna teğettir. ($(3,3)$ noktasının hiperbol ve doğru üzerinde olduğuna dikkat ediniz).

ÖRNEK. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = x^2 - y^2$ fonksiyonunun $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ kapalı birim diski üzerindeki ekstremumlarını bulunuz.

Çözüm. Problemi $\partial S = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1\}$ çemberi ve $S^0 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ açık diskinde ayrı ayrı ele almalıyız.

$\nabla f = 0$ denkleminden

$$f_x(x,y) = 2x = 0$$
$$f_y(x,y) = -2y = 0$$

denklem sistemi elde edilir. Bu sistemin çözümü $(0,0)$ noktası ve $f(0,0)=0$ dır. Yani S^0 kümesindeki ekstremum değer 0 dır.

Şimdi ∂S sınırını (çemberini) ele alalım. Bu durumda $g(x,y) = x^2+y^2-1=0$ ve $L(x,y,\lambda) = x^2-y^2+\lambda(x^2+y^2-1)$ dır. Buna göre

$$\nabla L(x,y,\lambda) = 0$$

denklemini, yani

$$2x = -2\lambda x$$
$$2y = 2\lambda y$$
$$x^2+y^2 = 1$$

denklem sistemini x, y, λ bilinmeyenlerine göre çözmeliyiz.

İkinci denkleme göre ya $y=0$ ya da $\lambda = 1$ dir.

Eğer $y=0$ ise üçüncü denklemden $x = \pm 1$ ve birinci

(128)

denklemden $\lambda=-1$ bulunur.

Eğer $\lambda=1$ ise, birinci denklemden $x=0$ ve böylece $y=\pm 1$ dir.

Böylece f nin birim çember üzerindeki kritik noktaları: $(0,-1)$, $(0,1)$, $(1,0)$ ve $(-1,0)$ dır.

$f(0,0)=0$, $f(0,-1)=-1$, $f(0,1)=-1$, $f(1,0)=f(-1,0)=1$ olduğundan f nin S üzerindeki mutlak minimumu -1, mutlak maksimumu 1 dir.

33. Teorem (Üç değişkenli fonksiyonlarda Lagrange çarpım yöntemi). $V\subset\mathbb{R}^3$ açık bir küme; $f\in C^1(V)$, $g\in C^1(V)$ ve $S=\{(x,y,z)\mid g(x,y,z)=0\}$ olsun. $P_0=(x_0,y_0,z_0)\in S$ ve $\nabla g(P_0)\neq 0$ olmak üzere $f|_S$ kısıtlanışının P_0 noktasında yerel ekstremumu varsa (f nin P_0 noktasında yan koşullu ekstremumu varsa), P_0 noktasında

$$\nabla f(P_0)+\lambda_0\nabla g(P_0)=0$$

(129)

olacak şekilde bir λ_0 sabiti vardır. *

NOT. İki değişkenli fonksiyonlarda olduğu gibi burada da $(x_0, y_0, z_0, \lambda_0)$ noktası

$$L(x,y,z,\lambda) = f(x,y,z) + \lambda g(x,y,z)$$

Lagrange fonksiyonunun bir kritik noktası, yani

$$\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$$

dır. Buna göre $f(x,y,z)$ nin $g(x,y,z)=0$ eğrisi üzerindeki ekstremum noktalarını bulabilmek için önce Lagrange fonksiyonunun

$$\nabla L(x_0, y_0, z_0, \lambda_0) = 0$$

kritik noktalarına bakılmalıdır. Eğer f nin ekstremumu varsa, onlar bu (x_0, y_0, z_0) noktaları arasındadır.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR