Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

15. Teorem (1. Kapalı Fonksiyon Teoremi): $V \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme, $(x_0, y_0) \in V$ ve $F: V \to \mathbb{R}$, $z = F(x,y)$ olmak üzere

(1) $F(x_0, y_0) = 0$, (2) bir $\delta_1 > 0$ için $F \in C^1(B((x_0, y_0), \delta_1))$,

(3) $F_y(x_0, y_0) \neq 0$

koşullarını sağlayan bir fonk. olsun. O zaman

(a) x_0 noktasının belli bir $B(x_0, \delta) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ komşuluğunda $F(x, f(x)) = 0$ olacak şekilde $B(x_0, \delta)$ üzerinde tanımlı bir tek $y = f(x)$ fonksiyonu vardır,

(b) $y_0 = f(x_0)$ dır,

(c) $f \in C^1(B(x_0, \delta))$ dır ve $\forall x \in B(x_0, \delta)$ için

$$F_y[x, f(x)] \neq 0 \quad \text{ve} \quad f'(x) = -\frac{F_x[x, f(x)]}{F_y[x, f(x)]}$$

olur.

ÖRNEK. $F(x,y)=y^3+3x^2y-x^3+2x+3y=0$ denkleminin her $x\in\mathbb{R}$ için kapalı olarak bir $y=f(x)$ fonksiyonunu tanımladığını gösteriniz ve $f'(x)$ türevini bulunuz.

Çözüm. $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $F_y(x,y)=3y^2+3x^2+3\neq 0$ o

Aşikar olarak $F\in C^1(\mathbb{R}^2)$ dir.

O halde $F(x_0,y_0)=0$ olan her (x_0,y_0) noktasında teoremin koşulları gerçekleşir.

Böylece $F(x,y)=0$ denkleminin kapalı olarak tanımladığı $y=f(x)$ fonksiyonu belli bir $\delta>0$ için $B(x_0,\delta)$ üzerinde tek türlü olarak var ve $f\in C^1(B(x_0,\delta))$, yine $\forall x\in B(x_0,\delta)$ için

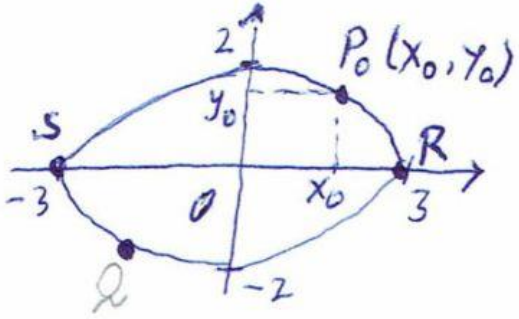
$$f'(x)=-\frac{F_x[x,f(x)]}{F_y[x,f(x)]}=-\frac{6xf(x)-3x^2+2}{3[f(x)]^2+3x^2+3}.$$

olur.

ÖRNEK. $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$ denklemi için kapalı fonksiyon teoreminin geçerli olduğu ve olmadığı noktaları bulunuz.

Çözüm. $F(x,y)=\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}-1=0$ denklemi bir elips belirtir.

Aşikar olarak



$y_0>0$ olmak üzere elips üzerinde bir $P_0=(x_0,y_0)$ noktası alınırsa, P_0 ın uygun bir komşuluğunda $F_y(x,y)=y/2>0$ dır.

P_0 elipsin üzerinde olduğundan $F(x_0,y_0)=0$ dır.
O halde son teoreme göre belli bir $\delta>0$ için $B(x_0,\delta)$ üzerinde $y=f_1(x)$, yani y, x in fonksiyonu olarak çözülebilir, daha kesin olarak $y=f_1(x)=\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$ olur.

Burada f_1 in tanımlı olabilmesi için $9-x^2\geq 0$ olmalı ve $B(x_0,\delta)$ işte bunu sağlar. Yine

$$f_1'(x)=-\frac{F_x}{F_y}=-\frac{4x}{9y}=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{9-x^2}}$$

dır.

Elipsin alt yarı-düzlemdeki kısmı üzerinden seçilen Q noktası için $F_y<0$ ve Q nun uygun bir komşuluğunda kapalı olarak tanımlanan fonksiyonda

$$y = f_2(x) = -\frac{2}{3}\sqrt{9-x^2}$$

olur.

Öte yandan $R=(3,0)$ ve $S=(-3,0)$ noktalarında $F_y = 0$ olup, teorem uygulanamaz, yani y, x in fonksiyonu olarak çözülemez.

Ama $F_x(x,y) = \frac{2}{9}x \neq 0$ olduğundan R ve S nin uygun bir komşuluğunda x, y ye göre çözülebilir ve sırasıyla

$$x = g(y) = \frac{3}{2}\sqrt{9-y^2} \wedge x = h(y) = -\frac{3}{2}\sqrt{9-y^2}$$

olur.

NOT. 1) Kapalı fonk. teoremi sadece yerel iddiada bulunur. f nin tanım kümesinin genişliği ile ilgili fikir vermez. Ama $B(P_0, \delta)$ ne kadar küçük olursa olsun teorem geçerlidir.

Şimdiki teorem bağımsız değişken sayısının iki olduğu duruma ilişkindir.

26. Teorem. $V \subset \mathbb{R}^3$ bir açık alt küme, $F \in C^1(V)$ ve $P_0 = (x_0, y_0, z_0) \in V$ olmak üzere $F(P_0) = 0$ ve $F_z(P_0) \neq 0$ olsun. O zaman

(a) Bir $B((x_0, y_0); \delta)$ yuvarında $F(x, y, g(x,y)) = 0$ olacak şekilde bir tek $z = g(x,y)$ vardır,

(b) $z_0 = g(x_0, y_0)$ dır,

(c) $g \in C^1(B((x_0, y_0), \delta)$ ve $(x, y) \in B((x_0, y_0), \delta)$ için

$$g_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} \quad \text{ve} \quad g_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)}$$

dır. #

Bu teoremin n tane bağımsız değişken için genellemesi şöyledir: $V \subset \mathbb{R}^{n+1}$ bir açık alt küme, $F \in C_1(V)$ ve $P_0 = (x_{01}, x_{02}, \ldots, x_{0n}; y_0) \in V$ olmak üzere $F(P_0) = 0$ ve $F_y(P_0) \neq 0$ olsun. O zaman

(a) $(x_{01},\dots,x_{0n})$ noktasının uygun bir komşuluğunda $F(x_1,\dots,x_n, g(x_1,\dots,x_n))=0$ o.ş. bir tek $z=g(x,y)$ fonksiyonu vardır.

(b) $y_0 = g(x_{01},\dots,x_{0n})$ dir.

(c) $g\in C^1(B(x_{01},\dots,x_{0n}))$ ve $(x_1,x_2,\dots,x_n)\in B((x_{01},\dots,x_{0n}),\delta)$ için

$$g_{x_i} = -\frac{F_{x_i}(x_1,\dots,x_n)}{F_y(x_1,\dots,x_n)}$$

olur.

ÖRNEK. $F(x,y,z)=e^{-xy}-2z+e^{z}=0$ denkleminin $z\neq \ln 2$ olmak üzere $F(x_0,y_0,z_0)=0$ koşulunu sağlayan herhangi bir $P_0=(x_0,y_0,z_0)$ noktasının $B(P_0,\delta)$ komşuluğunda kapalı olarak bir $z=f(x,y)$ fonksiyonunu tanımladığını gösteriniz.

Çözüm. $F_x(x,y,z)=-ye^{-xy}$, $F_y(x,y,z)=-xe^{-y}$, $F_z(x,y,z)=-2+e^{z}$ olup, $\forall B(P_0,\delta)$ komşuluğunda süreklidirler.

O halde $F\in C^1(B(P_0,\delta))$, hatta $F\in C^1(\mathbb{R}^3)$ tür.

$z \neq \ln 2$ olduğundan $F_z(P_0) \neq 0$ dır.

O halde kapalı fonksiyon teoreminin koşulları sağlandı.
Buna göre (x_0, y_0) noktasının uygun bir $B((x_0,y_0),\delta)$ komşuluğunda tanımlı bir tek $z=f(x,y)$ fonksiyonu vardır.
Ayrıca

$$z_x(x,y) = -\frac{F_x(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{ye^{-xy}}{-2+e^{\cancel{x}}}$$

ve

$$z_y(x,y) = -\frac{F_y(x,y,z)}{F_z(x,y,z)} = \frac{xe^{-xy}}{-2+e^{\cancel{x}}}$$

olup, $z_x(1,0) = 0$ ve $z_y(1,0) = -1$ dır.

NOT. Genelde $F(x,y,z)=0$ denklemi yüzeyin kapalı denklemi ve $z=f(x,y)$ ise yüzeyin açık denklemidir. $z=f(x,y)$ nin grafiği, $F(x,y,z)=0$ denkleminin çözüm kümesidir.

Bölge Dönüşümleri için Kapalı Fonksiyon Teoremi:

Burada bir düzlem bölgeyi yine bir düzlem bölgeye dönüştüren ve kapalı olarak tanımlanan fonksiyonlarla ilgili kapalı fonksiyon teoremini vereceğiz. $u=u(x,y)$ ve $v=v(x,y)$ fonksiyonlarının x ve y değişkenlerine göre Jakobiyen determinantı (kısaca Jakobiyeni)

$$J=\frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}=\begin{vmatrix} u_x & u_y \\ v_x & v_y \end{vmatrix}=u_x v_y-u_y v_x$$

biçiminde tanımlanır.

Bu tanım n tane fonksiyonun n tane değişkene göre Jakobiyenin tanımına genişletilebilir.

27. Teorem. $V\subset\mathbb{R}^4$ bir açık alt küme, F ve $G\in C^1(V)$ ve $P_0=(x_0,y_0,u_0,v_0)\in V$ için $F(P_0)=0$, $G(P_0)=0$ olsun. Yine P_0 noktasında $J=\partial(F,G)/\partial(u,v)\neq 0$ olsun. O zaman

(a) Uygun bir $B((x_0,y_0),\delta)$ komşuluğunda tanımlı ve

$$F(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0,\ G(x,y,f_1(x,y),f_2(x,y))=0$$

olacak şekilde bir tek $u = f_1(x,y)$ ve $v = f_2(x,y)$ fonksiyonu vardır.

(b) $u_0 = f_1(x_0, y_0)$ ve $v_0 = f_2(x_0, y_0)$ dır.

(c) $f_1, f_2 \in C^1(B((x_0,y_0),\delta))$ ve $(x,y) \in B((x_0,y_0),\delta)$ için

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,x)}$$

ve benzer şekilde

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(y,v)}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{J}\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}$$

dir.

ÖRNEK. Aşağıda verilen denklem sisteminin $P_0 = (2,-1,2,1)$ noktasının uygun bir komşuluğunda kapalı olarak $u = f_1(x,y)$, $v = f_2(x,y)$ fonksiyonlarını tanımladığını gösteriniz ve P_0 noktasında $\frac{\partial u}{\partial x}$ ve $\frac{\partial v}{\partial y}$ değerlerini hesaplayınız:

$$x^2 - y^2 - u^2 + v^2 + 4 = 0$$
$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0.$$

4 - 1 - 4 + 1 + 4 = 0

-4 + 1 - 8 + 3 + 8

Çözüm. $F(x,y,u,v)=x^2-y^2-u^3+v^2+4$

$$G(x,y,u,v)=2xy+y^2-2u^2+3v^4+8$$

olsun. $F(P_0)=0$ ve $G(P_0)=0$ olduğu kolayca görülebilir.

Yine $F,G\in C^1(\mathbb{R}^4)$ dir. Ayrıca F ve G nin u ve v değişkenlerine göre Jacobiyeni

$$J=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}-3u^2 & 2v\\ -4u & 12v^3\end{vmatrix}=-36u^2v^3+8uv$$

olup, J nın P_0 daki değeri $J_{P_0}=-128\neq 0$ dır.

O halde son teoreme göre uygun bir $B((x_0,y_0),\delta)$ komşuluğunda kapalı olarak tanımlı $u=f_1(x,y)$ ve $v=f_2(x,y)$ fonksiyonları vardır. Üstelik

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(x,v)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_x & F_v\\ G_x & G_v\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}=-\frac{\begin{vmatrix}2x & 2v\\ 2y & 12v^3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-3u^2 & 2v\\ -4u & 12v^3\end{vmatrix}}\Rightarrow \left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{P_0}=-\frac{\begin{vmatrix}4 & 2\\ -2 & 12\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}-12 & 2\\ -8 & 12\end{vmatrix}}=-\frac{52}{-128}=\frac{13}{32}$$

olur ve

$$\frac{\partial v}{\partial y}=-\frac{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,y)}}{\dfrac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}=-\frac{\begin{vmatrix}F_u & F_y\\ G_u & G_y\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix}}\Rightarrow -\frac{1}{-128}\begin{vmatrix}-3u^2 & -2y\\ -4u & 2y\end{vmatrix}=\frac{-1}{128}\begin{vmatrix}-12 & 2\\ -8 & -2\end{vmatrix}=\frac{-8}{128}=\frac{-1}{16}=\left.\frac{\partial v}{\partial y}\right|_{P_0}.$$

Fırsatlar Sunar

Prof. Dr. Cenap DUYAR

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları