



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II
Hacim Hesabı

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

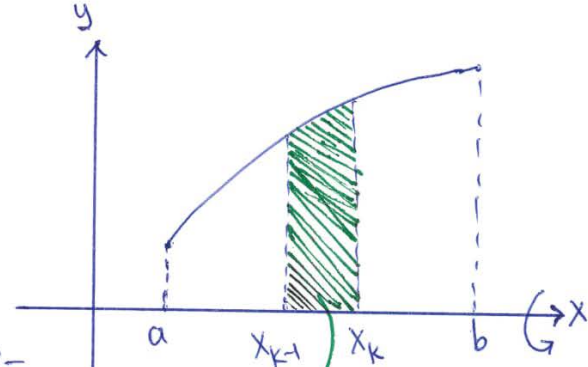
Ders 14

7.2. HACİM HESABI :

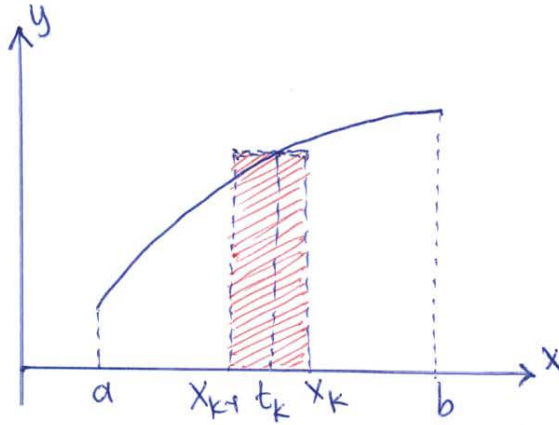
Bir düzlemsel bölgenin dönme eksenini adını alan bir doğru çerçevesinde döndürülmesiyle oluşan cisme dönel cisim denir. Bu kısımda dönel cisimlerin hacimlerini bulmada kullanılan iki yöntem vereceğiz.

1. Silindirik (Disk) Yöntemi :

$[a, b]$ aralığında $f(x) \geq 0$ olan bir $y = f(x)$ fonksiyonu verilsin ve dönme eksenini x -olsun. $y = f(x)$ eğrisi, x -ekseni ve $x = a$, $x = b$ doğrularının sınırlandığı bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan cismin hacmini bulalım.



Bu bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim $V(S_k)$ olsun.



P , $[a, b]$ -nin herhangi bir parçalanışı olmak üzere her bir $[X_{k-1}, X_k]$ alt aralığından seçilen t_k noktası için tabanı

$\Delta X_k = X_k - X_{k-1}$, yüksekliği $f(t_k)$ olan bir dikdörtgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan silindirin

hacmini düşünelim. Bu silindirin hacmi

$\pi \cdot f^2(t_k) \cdot \Delta X_k$ olup arkadaki $V(S_k)$ değerine eşit olmayıp yaklaşıktır. Bunu P -nin her kapalı alt aralığında yaparsak bulmamız gereken V hacmi için

$$V = \sum_{k=1}^n V(S_k) \approx \sum_{k=1}^n \pi f^2(t_k) \cdot \Delta X_k \quad \text{yaklaşık hesabı bulunur.}$$

$\|P\| \rightarrow 0$ limit alındığında V -nin gerçek değerine varacağımızdan

$$V = \sum_{k=1}^n V(S_k) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n \pi \cdot f^2(t_k) \cdot \Delta x_k$$

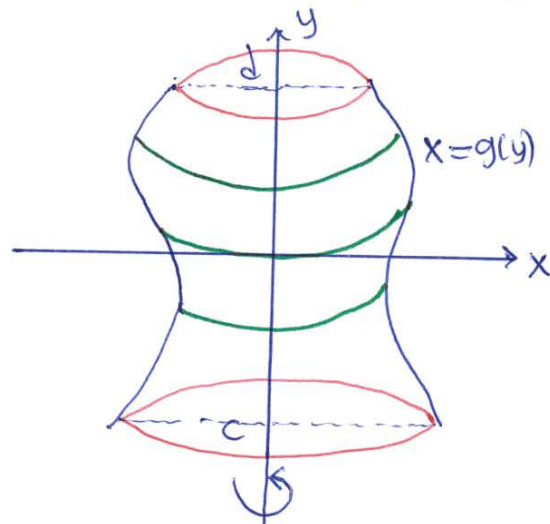
$$= \pi \int_a^b f^2(x) \cdot dx \quad \text{dur.}$$

NOT: Benzer şekilde y -ekseni üzerindeki $[c, d]$ aralığında $g(y) \geq 0$ olan bir $x = g(y)$ fonksiyonu için y -ekseni $y=c, y=d$ doğrularının sınırlandığı bölgenin

y -ekseni etrafında dönmesiyle oluşan dönel cismin hacmi V_y ise

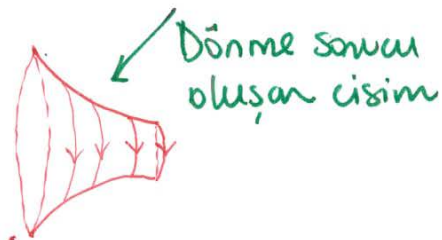
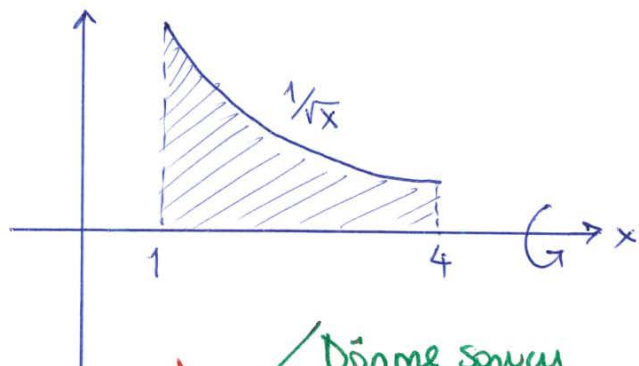
$$V_y = \pi \int_c^d g^2(y) dy$$

dur.



UYARI: Silindirik yönteminde fonksiyonun değişkeni, bölgenin başlayıp bittiği noktalar ve dönme eksenini aynı olmalıdır.

ÖR: $y = 1/\sqrt{x}$ eğrisi, x -ekseni, $x=1$, $x=4$ ile sınırlanan bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan dönel cismin hacmini bulalım.

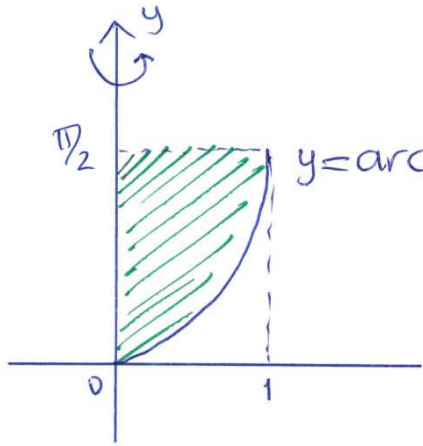


Dönme sonucu
oluşan cisim

$$V = \pi \int_1^4 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} \right)^2 dx$$

$$= \pi \int_1^4 \frac{1}{x} dx = \pi \cdot \ln 4 \text{ br}^3$$

ÖRNEK: $y = \arcsin x$, y -ekseni ; $y=0$, $y=\pi/2$ doğrusunun sin. bölge-
nin y -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim ?

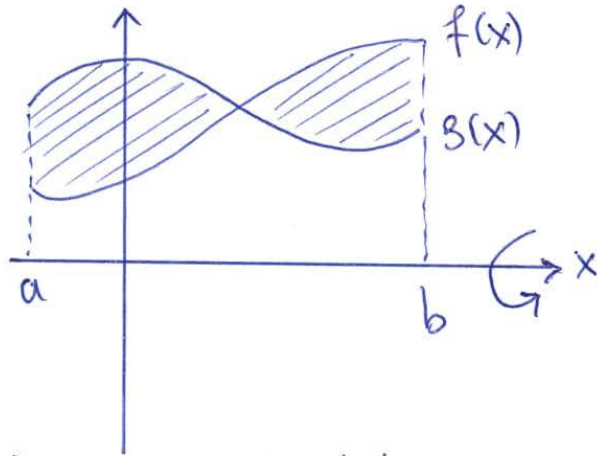


* Silindirik yöntemine göre her şey
dönme eksenini değişkeniyle aynı
olmalıydı. O zaman $y = \arcsin x$ yerine
 $x = \sin y$ fonk. kullanacağız:

$$V = \pi \int_0^{\pi/2} [\sin y]^2 \cdot dy = \pi \int_0^{\pi/2} \left(\frac{1 - \cos 2y}{2} \right) dy$$

$$= \frac{\pi}{2} \left[y - \frac{\sin 2y}{2} \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi^2}{4} \text{ br}^3 \text{ olur.}$$

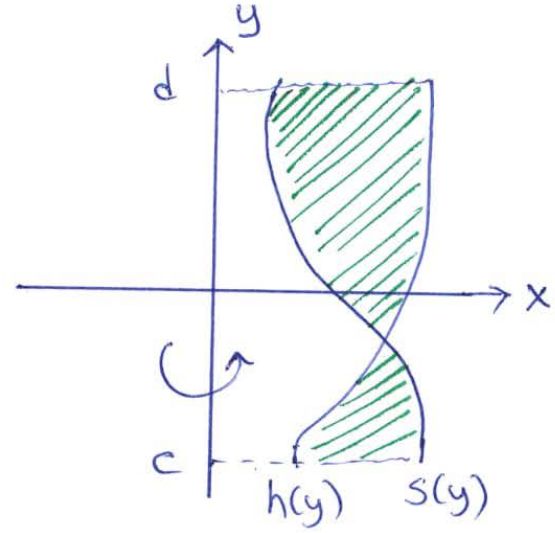
NOT: Bazende π li eğri arasında kalan bölgenin eksenler etrafın-
da dönmesi sonucu dönel cismin hacmi istenebilir.



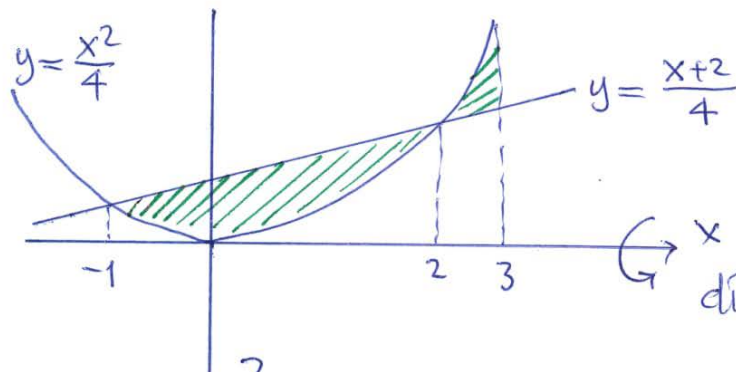
Bu durumda V hacim bulunurken
 distaki eğrinin dönmesiyle oluşan hacimden
 içteki eğrinin dönmesi ile oluşan cismin hacmi çıkarılır.

$$V = \left(\text{Distaki eğrinin} \right) - \left(\text{İçteki eğrinin} \right)$$

oluşturduğu hacim oluşturduğu hacim



ÖR: $x^2=4y$ parabolü $y=\frac{x+2}{4}$ doğrusu $x=-1$ ve $x=3$ doğrularının sınırlandığı bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim?

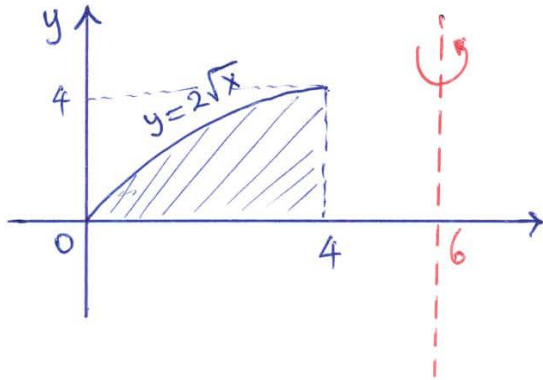


→ Son nota göre hacim hesaplanırken $[-1, 2]$ ve $[2, 3]$ aralıklarında dıştan oluşan hacim (fonksiyonu) dikkate alınmalıdır.

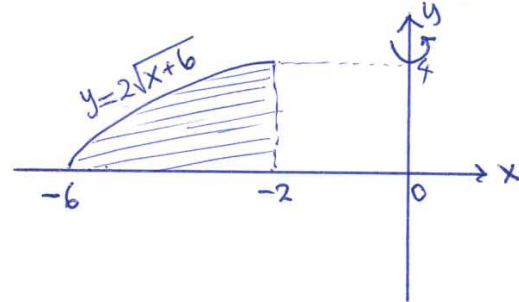
$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_{-1}^2 \left[\left(\frac{x+2}{4} \right)^2 - \left(\frac{x^2}{4} \right)^2 \right] dx + \pi \int_2^3 \left[\left(\frac{x^2}{4} \right)^2 - \left(\frac{x+2}{4} \right)^2 \right] dx \\
 &= \pi \int_{-1}^2 \frac{x^2 + 4x + 4 - x^4}{16} dx + \pi \int_2^3 \frac{x^4 - x^2 - 4x - 4}{16} dx \\
 &\text{olur.}
 \end{aligned}$$

* Dönel cisimlerin hacimleri hesaplanırken dönme eksenini ya x -yada y -tdi. Ancak başka eksenler etrafında dönme yapmak da mümkündür. Şimdi eksenlere paralel doğrular etrafında dönme olduğunda hacmin nasıl hesaplanacağını gösterelim.

ÖR: $y = 2\sqrt{x}$ eğrisi x -ekseni; $x=0, x=4$ doğru ile sınırlı bölgenin $x=6$ etrafında dönmesi sonucu oluşan hacmi bulalım.



Dönme eksenini y -ekseni yapmak için tüm sistemi 6 br sola kaydırırsak

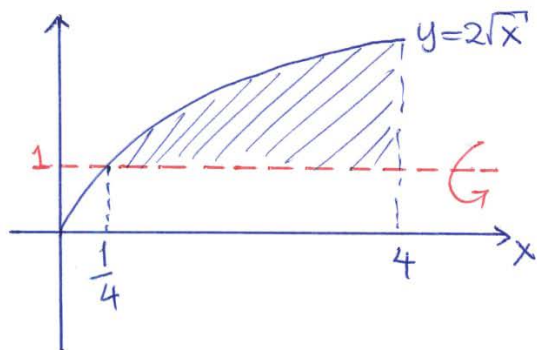


Dönme eksenini y olduğundan parametreleride y yaparsak; sınırlar $y=0, y=4$ olup bölgeyi sınırlandıran fonksiyonlar $x=\frac{y^2}{4}-6$ ve $x=-2$ doğrusudur. O zaman hacim

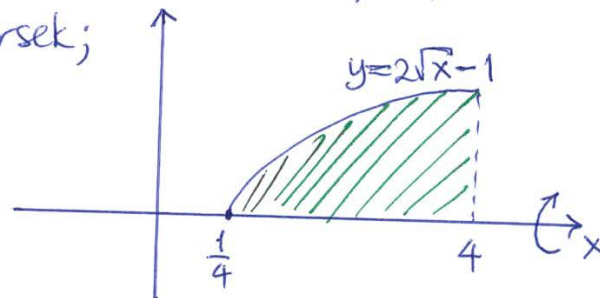
$$V = \pi \int_0^4 \left[\left(\frac{y^2}{4} - 6 \right)^2 - (-2)^2 \right] dy = \pi \int_0^4 \left(\frac{y^4}{16} - 3y^2 + 36 - 4 \right) dy$$

bulunur.

ÖR: $y=2\sqrt{x}$ eğrisi $y=1$ doğrusu ve $x=4$ doğrusunun sınırlandığı kapalı bölgenin $y=1$ etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim nedir?



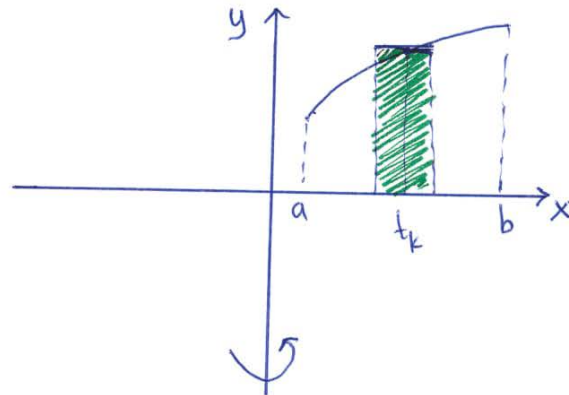
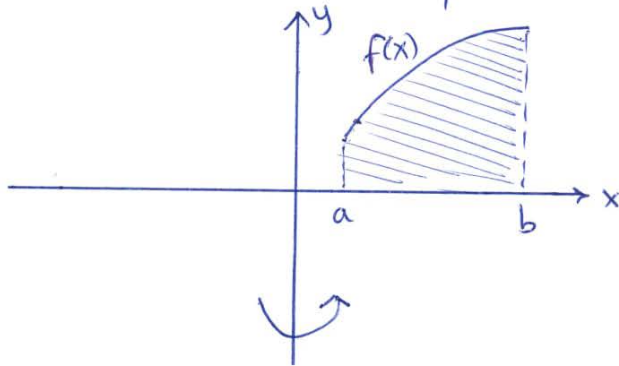
→ Dönme eksenini x -ekseni yapmak için tüm sistemi 1 br aşağıya östersek;



$$V = \pi \cdot \int_{\frac{1}{4}}^4 (2\sqrt{x}-1)^2 \cdot dx = \pi \int_{\frac{1}{4}}^4 (4x - 4\sqrt{x} + 1) \cdot dx \text{ olur.}$$

2. Kabuk Yöntemi:

$0 \leq a < b$ olmak üzere $[a, b]$ aralığında negatif olmayan $f(x)$ fonksiyonu verilsin. $x=a$, $x=b$ doğruları; $y=f(x)$ eğrisi ve x -ekseninin sınırladığı bölgenin y -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan dönel cismin hacmini bulalım.



$[X_{k-1}, X_k]$ aralığına karşılık gelen bölgenin y -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim $V(S_k)$ olsun. $V(S_k)$ değeri kesin olarak bulunamazken taralı dikdörtgeni y -ekseni etrafında çevirirsek bulunan hacim $V(S_k)$ -ya yakın olur. $t_k \in [X_{k-1}, X_k]$ orta nokta olmak üzere

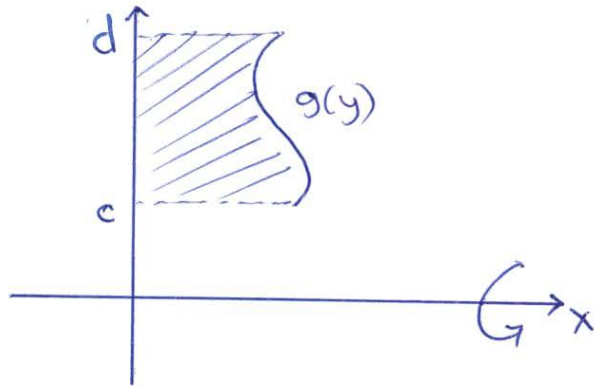
$$\begin{aligned} V(S_k) &\approx \pi \cdot X_k^2 \cdot f(t_k) - \pi X_{k-1}^2 \cdot f(t_k) \\ &= \pi \cdot f(t_k) \cdot [X_k^2 - X_{k-1}^2] = \pi \cdot f(t_k) \cdot \Delta X_k \cdot (X_k + X_{k-1}) \\ &= \pi \cdot f(t_k) \cdot \Delta X_k \cdot 2t_k \text{ olur. } 0 \text{ zaman} \end{aligned}$$

$$V = \sum_{k=1}^n V(S_k) \approx \sum_{k=1}^n 2\pi \cdot t_k \cdot f(t_k) \cdot \Delta X_k \text{ olup } V\text{'nin değeri}$$

$\|P\| \rightarrow 0$ limit ile bulunur. Bu ise belirli integralin tanımıyla

$$V = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n 2\pi \cdot t_k \cdot f(t_k) \cdot \Delta X_k = 2\pi \int_a^b x \cdot f(x) \cdot dx \text{ olur.}$$

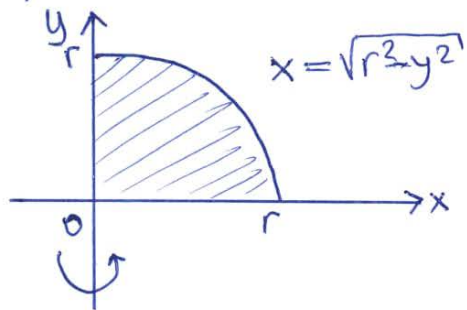
Benzer yolla $0 \leq c < d$ olmak üzere y -ekseni üzerinde $x=g(y)$ y -ekseni ve $y=c, y=d$ doğrularının sınırlandığı bölgenin x -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan hacim



$$V = 2\pi \int_c^d y \cdot g(y) \cdot dy \text{ olur.}$$

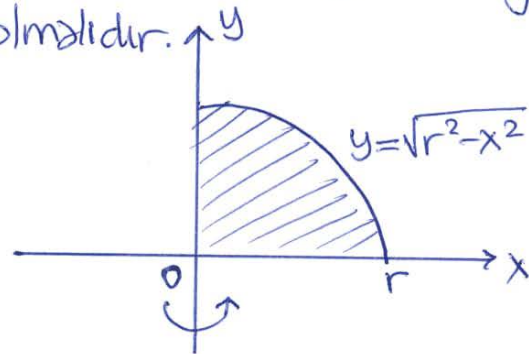
ÖR: $x^2 + y^2 = r^2$ çemberinin 1. bölgedeki parçasının y -ekseni etrafında dönmesi sonucu oluşan dönel cismin hacmini silindirik ve kabuk yöntemiyle bulalım.

(i) Silindirik yöntemi için tüm parametreler dönme eksenine aynı olmalıdır.



$$\begin{aligned}
 V &= \pi \int_0^r [(\sqrt{r^2 - y^2})^2 - 0^2] \cdot dy \\
 &= \pi \int_0^r (r^2 - y^2) \cdot dy \\
 &= \frac{2\pi r^3}{3}
 \end{aligned}$$

(ii) Kabuk yöntemine göre dönme eksenini haric diğerleri aynı olmalıdır.



$$\begin{aligned}
 V &= 2\pi \int_0^r x \cdot \sqrt{r^2 - x^2} \cdot dx \\
 &= \frac{2\pi r^3}{3} \text{ bulunur.}
 \end{aligned}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



15

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 14