UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II

Integral Hesabının Temel Teoremleri ve Alan Hesabı

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 13

6.3.4. Teorem (Değişken değiştirme)

$g:[a,b]\to\mathbb{R}$ türevlenebilir bir fonksiyon ve $f:[c,d]\to\mathbb{R}$ sürekli ve $g([a,b])\subset[c,d]$ olsun. O zaman

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\,du$$

olur.

İspat: f-nin ilkel fonksiyonu F olsun. O zaman $F'(x)=f(x)$ olup

$$\int_a^b f(g(x))\cdot g'(x)\,dx=\int_a^b F'(g(x))\cdot g'(x)\cdot dx$$

$$=\int_a^b [(F\circ g)(x)]'\cdot dx$$

$$=F(g(b))-F(g(a))=\int_{g(a)}^{g(b)} f(u)\cdot du \text{ olur.}$$

6.3.5. Teorem (Kısmi İntegral)

$f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ sürekli türevlenebilir iki fonksiyon ise

$$\int_a^b f(x).g'(x)dx = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x).g(x).dx$$

dir.

İspat: $F(x) = (f.g)(x)$ alınırsa F sürekli türevlenebilir olup

$$f(x).g(x)\Big|_a^b = F(x)\Big|_a^b = \int_a^b F'(x).dx$$

$F' = f'.g + f.g'$

$$= \int_a^b f'(x).g(x)\,dx + \int_a^b f(x).g'(x).dx \Rightarrow$$

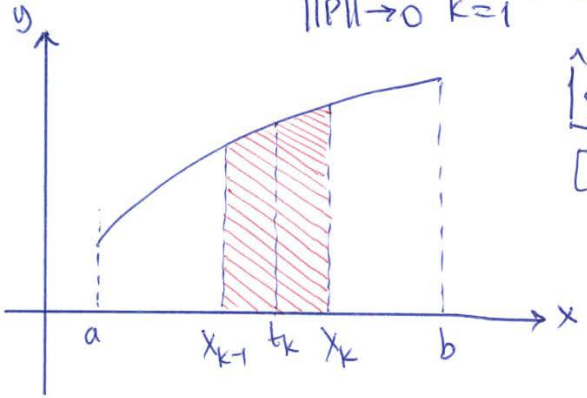
$$\int_a^b f'(x)g(x)dx = f(x).g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f(x).g'(x)dx$$ bulunur.

7. BÖLÜM

7.1. ALAN HESABI

Teorem 7.1: $[a,b]$ aralığında negatif olmayan, sürekli bir $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $[a,b]$ aralığının bir parça bölüntüsü $P=\{x_0,x_1,x_2,\dots,x_n\}$ ve $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığına ait bir nokta t_k olsun. $[a,b]$ aralığı boyunca $y=f(x)$ eğrisi ve x-ekseninin sınırlandırdığı bölgenin alanı A için

$$A=\lim_{\|P\|\to 0}\sum_{k=1}^{n} f(t_k)\cdot\Delta x_k=\int_a^b f(x)\,dx \quad \text{dir.}$$



İspat: $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ olmak üzere $[x_{k-1},x_k]$ alt aralığına karşılık gelen alan A_k olsun. O zaman

$$A=A_1+A_2+\dots+A_k+\dots+A_n$$

olup

$k=1,2,\dots,n$ için

$$m_k = \inf\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

$$M_k = \sup\{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$ gereği her $k \in 1,2,\dots,n$

$m_k \leq f(t_k) \leq M_k$ ve $m_k . \Delta x_k \leq f(t_k) . \Delta x_k \leq M_k . \Delta x_k$

yazılabilir. Buradan

$$\sum_{k=1}^{n} m_k . \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} f(t_k) . \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^{n} M_k . \Delta x_k \Rightarrow$$

$A(f,P) \leq R(f,P,t) \leq Ü(f,P)$ olur. Yine $A(f,P) \leq A \leq Ü(f,P)$ olup f sürekli ve dolayısıyla integrallenebilir olduğundan

$$A = \lim_{\|P\| \to 0} R(f,P,t)$$

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$ bulunur.

7.2. Önerme: $y=f(x)$ fonksiyon eğrisi, x-ekseni ve $x=a, x=b$ doğrularının sınırlandırdığı bölgenin alanı A ise

$$A=\int_a^b |f(x)|\,dx \quad \text{dir.}$$

İspat: 7.1. Teoremde $f(x)\geq 0$ ise alanın $\int_a^b f(x)\,dx$ olduğunu göstermiştik. Buna göre

(i) $\forall x\in[a,b]$ için $f(x)\geq 0$ ise $A=\int_a^b f(x)\,dx$ olur.

(ii) $\forall x\in[a,b]$ için $f(x)\leq 0$ ise $-f(x)\geq 0$ olup (i) ile $A=\int_a^b -f(x)\,dx$ olur.

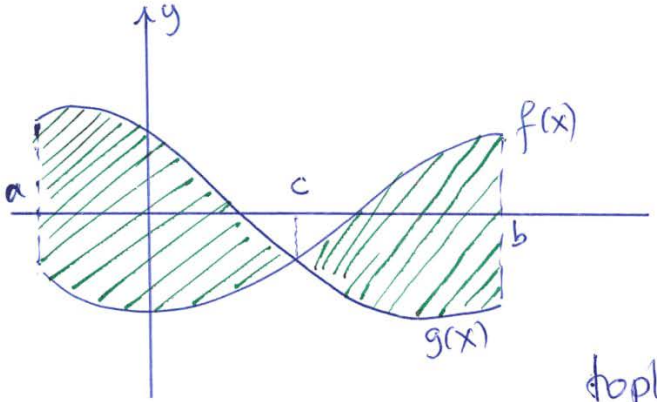
(iii) $c\in(a,b)$ olmak üzere $\forall x\in[a,c]$ için $f(x)\geq 0$ ve $\forall x\in[c,b]$ için $f(x)\leq 0$ ise (i) ve (ii) ile

$$A=\int_a^c f(x)\,dx+\int_c^b -f(x)\,dx \text{ olur.}$$

NOT: Bu teorem sayesinde $[a,b]$ aralığında tanımlı, sürekli iki f, g fonksiyonunun beraber sınırlandırdıkları bölgenin alanı S ise

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| \cdot dx$$

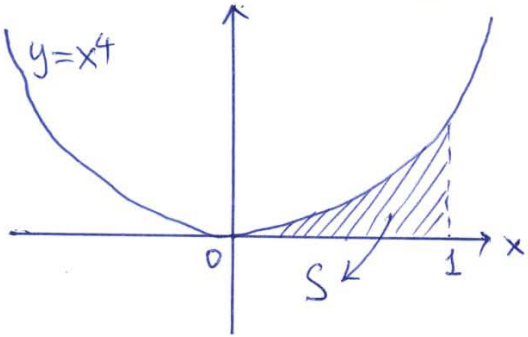
olur.



Burada kesişim noktasına kadar $g(x) > f(x)$ iken kesişim noktasından sonra $f(x) > g(x)$ olduğundan mutlak değer yerine S alanını bulmak için iki integral bulup toplayabilirsiz. Yani

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx = \int_a^c (g(x) - f(x)) dx + \int_c^b (f(x) - g(x)) dx \text{ dir.}$$

ÖR: $y=x^4$ eğrisi, x-ekseni ve $x=0$, $x=1$ doğrularının sınırlandırdığı bölgenin alanını bulalım.



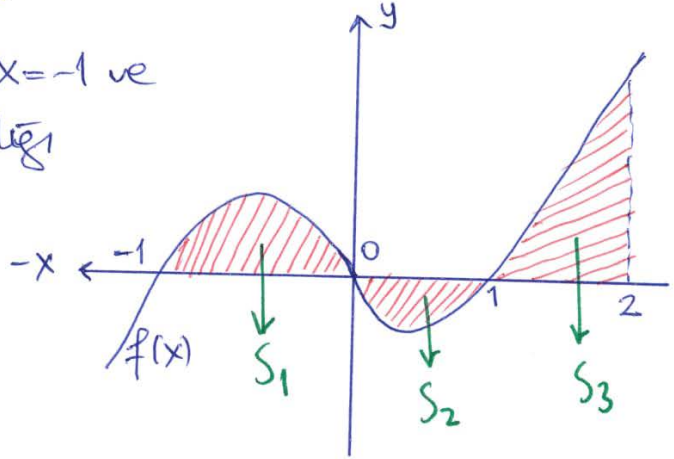
Bölgeyi x^4 sürekli ve negatif olmayan fonksiyonu x-ekseni ile beraber sınırlandırdıklarından

$$S=\int_0^1 x^4 \cdot dx = \frac{1}{5}\, br^2\ ^1 \text{ dir.}$$

ÖR: $y=x^3-x$ eğrisi; $y=0$, $x=-1$ ve $x=2$ doğrularının sınırlandırdığı bölgenin alanını bulalım.

($y=0$ demek x-ekseni)

$y=x^3-x=x(x^2-1)$ olup



$S = S_1 + S_2 + S_3$ için S_1, S_3 bölgelerinde $f(x)$ (+) pozitif S_2 bölgesinde ise f negatiftir. O zaman

$$S_1 = \int_{-1}^{0} (x^3 - x)\,dx = \frac{1}{4}$$

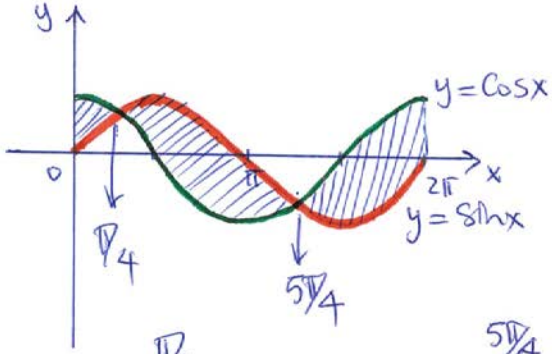
$$S_2 = \int_{0}^{1} (-x^3 + x)\,dx = \frac{1}{4} \quad ; \quad S_3 = \int_{1}^{2} (x^3 - x)\,dx = \frac{9}{4}$$

olup $S = \frac{11}{4}$ br^2 dir.

UYARI: Integral operatörü işarete hassas olup alan hesabı yaparken bölgenin büyüklüğünün yanısıra işaretine de bakar. Bundan dolayı 7.2. Önermedeki gibi mutlak değer kullanmak istemiyorsak grafik çizip fonk.nun işaretine dikkat etmemiz gerekiyor. Bu örnekte grafik çizmeden $\int_{-1}^{2} f(x)\,dx$ int. alsaydık sonuç farklı

yani S alan değeri $9/4$ çıkacaktı. Bu ise yanlış hesaplama demektir.

ÖR: $[0, 2\pi]$ aralığında $y = \sin x$, $y = \cos x$ eğrileri arasında kalan bölgenin alanı nedir?



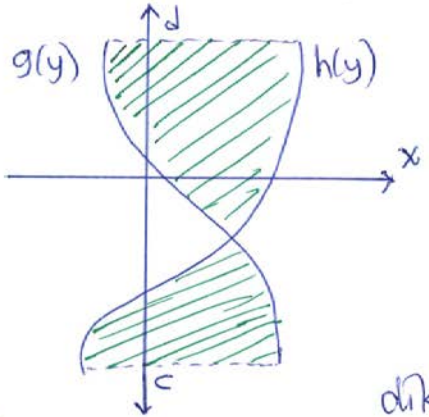
Önce kesişme noktalarını bulalım. $\sin x = \cos x \Rightarrow \tan x = 1 \Rightarrow x = \pi/4 + k\pi$ olup $[0, 2\pi]$ aralığındaki kökler $\pi/4$ ve $5\pi/4$ olur. O zaman alan S dersek

$$S = \int_0^{\pi/4} (\cos x - \sin x)\,dx + \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (\sin x - \cos x)\,dx + \int_{5\pi/4}^{2\pi} (\cos x - \sin x)\,dx$$

$$= (\sin x + \cos x)\Big|_0^{\pi/4} + (-\cos x - \sin x)\Big|_{\pi/4}^{5\pi/4} + (\sin x + \cos x)\Big|_{5\pi/4}^{2\pi}$$

$$= 4\sqrt{2}.$$

NOT: $x=g(y)$, $x=h(y)$ eğrileri ve $y=c$, $y=d$ doğrularının sınırlandırdığı bölgenin alanı benzer yolla;



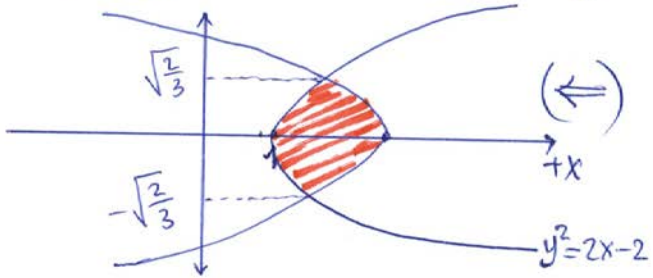
$$S=\int_c^d |g(y)-h(y)|\,dy$$ olur.

Burada da mutlak değer kullanmamak için üstteki fonksiyon $+x$ eksenine göre bakılır. Yine kesişim noktaları dikkate alınmalıdır.

ÖR: $y^2=2x-2$ eğrisi ile $x=2-y^2$ eğrilerinin sınırlandırdığı kapalı bölgenin alanını bulalım.

$y^2=2x-2=2-x \Rightarrow$

$x=\frac{4}{3}$ olup $y=\mp\sqrt{\frac{2}{3}}$ dir.



$$A = \int_{-\sqrt{\frac{2}{3}}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \left[(2-y^2) - \left(\frac{y^2+2}{2} \right) \right] dy = \int_{-\sqrt{2/3}}^{\sqrt{\frac{2}{3}}} \left(\frac{2-3y^2}{2} \right) dy \text{ olur.}$$

UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER...

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 13