



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II

İntegrallenebilir Bazı Fonksiyon Sınıfları ve Riemann İntegralinin
Özellikleri

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 12

6.2. İNTEGRALLENEBİLİR BAZI FONKSİYON SINIFLARI VE RIEMANN İNTEGRALİNİN ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde hangi fonksiyonların integrallenebilir olduğunu inceleyeceğiz ve Riemann integralinin bazı özelliklerini vereceğiz. Daha önce $[a, b]$ üzerinde tanımlı Riemann anlamında integrallenebilen reel değerli bütün fonksiyonlar kümesini $\mathcal{R}[a, b]$ ve $[a, b]$ üzerinde sınırlı reel değerli bütün fonksiyonlar kümesini de $\mathcal{B}[a, b]$ ile göstermiştik.

6.2.1.Teorem: $[a, b]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilen her fonksiyon bu aralık üzerinde sınırlıdır.

İspat: Kabul edelim ki $f, [a, b]$ üzerinde sınırsız olsun, $(P, t), [a, b]$ nın işaretlenmiş herhangi bir parçalanışı ve $R(f, P, t) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$ olsun.

$f, [a, b]$ üzerinde sınırsız olduğundan, bu fonksiyon $[x_{k-1}, x_k]$ aralıklarından en az biri üzerinde sınırsızdır. Bu aralık $[x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ olsun. O zaman öyle bir $t_{k_0} = \widetilde{t}_{k_0} \in [x_{k_0-1}, x_{k_0}]$ noktası vardır ki, her $A > 0$ sayısı için

$$|f(\widetilde{t}_{k_0})| > \frac{1}{\Delta x_{k_0}} \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^n f(t_k) \Delta x_k \right] + A$$

olur. O halde, $\tilde{t} = (t_1, \dots, t_{k_0-1}, \widetilde{t}_{k_0}, t_{k_0+1}, \dots, t_n)$ olmak üzere $[a, b]$ nin işaretlenmiş (P, t) parçalanışı için

$$\begin{aligned}
|R(f, P, \tilde{t})| &= \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^n f(t_k) \Delta x_k + f(t_{k_0}) \Delta x_{k_0} \right| \\
&\geq |f(t_{k_0})| \Delta x_{k_0} - \left| \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq k_0}}^n f(t_k) \Delta x_k \right| > A
\end{aligned}$$

olur. Buna göre, eğer $f, [a, b]$ üzerinde sınırsız ise herhangi $A > 0$ sayısı ve $[a, b]'$ nin herhangi bir P parçalanması için öyle bir $\tilde{t}$ n -lisi bulunabilir ki, $|R(f, P, \tilde{t})| > A$ olur. Bu da f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde integrallenemez olduğunu gösterir.

Sonuç : $\mathcal{R}[a, b] \subset \mathcal{B}[a, b]$ dir.

Teorem 6.2.2 : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ ise $[a, b]$ aralığının herhangi bir parçalanışı olsun. Bu durumda,

$$\ddot{U}(f, P) - A(f, P) = \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k$$

dır. Burada $w_k(f) = \sup\{|f(x) - f(y)|: x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$ olup f fonksiyonun $[x_{k-1}, x_k]$ aralığı üzerindeki salınımıdır.

İspat: $X \subset \mathbb{R}, Y \subset \mathbb{R}$ ve $Z = \{z = x - y: x \in X, y \in Y\}$ kümeleri için $\sup Z = \sup X - \inf Y$ olduğundan,

$$\begin{aligned} M_k(f) - m_k(f) &= \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\} - \inf\{f(y): y \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &= \sup\{f(x) - f(y): x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \end{aligned}$$

$$= \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

yazılabilir. Buradan eşitliğin doğruluğu anlaşılır.

Tanım 6.2.3: $X \subset \mathbb{R}, f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ sayısı ve $\forall x_1, x_2 \in X$ noktaları için

$$|x_1 - x_2| < \delta \Rightarrow |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$$

olacak şekilde yalnızca ε na bağlı bir $\delta = \delta(\varepsilon)$ sayısı varsa, f fonksiyonu X üzerinde düzgün süreklidir denir.

Teorem 6.2.4 (Düzgün Süreklilik Üzerine Cantor Teoremi): $\mathbb{R}$ nin kompakt (kapalı ve sınırlı) alt kümesi üzerinde sürekli her fonksiyon bu küme üzerinde düzgün süreklidir.

İspat: Kabul edelim ki kapalı ve sınırlı bir $X \subset \mathbb{R}$ kümesinde sürekli bir $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu X üzerinde düzgün sürekli değildir. O halde, $\exists \varepsilon_0 > 0$ öyleki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $|x'_n - x''_n| < \frac{1}{n}$ olduğunda $|f(x'_n) - f(x''_n)| \geq \varepsilon_0$ olacak şekilde $x'_n, x''_n \in X$ noktaları vardır. (x'_n) dizisi sınırlı olduğuna göre Weierstrass teoremine göre yakınsak en az bir alt dizisi vardır. Bu $\lim_{k \rightarrow \infty} x'_{n_k} = x_0$ olsun. X kapalı olduğundan dolayı $x_0 \in X$ dir. $\forall k \in \mathbb{N}$ için

$$|x''_{n_k} - x_0| \leq |x''_{n_k} - x'_{n_k}| + |x'_{n_k} - x_0| \leq \frac{1}{n_k} + |x'_{n_k} - x_0|$$

dır. $\lim_{k \rightarrow \infty} n_k = +\infty$ ve $\lim_{k \rightarrow \infty} |x'_{n_k} - x_0| = 0$ olduğuna göre, son eşitsizlikten

$\lim_{k \rightarrow \infty} |x''_{n_k} - x_0| = 0 \Rightarrow \lim_{k \rightarrow \infty} x''_{n_k} = x_0$ bulunur. Yine f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli olduğundan

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x''_{n_k}) = f(x_0)$$

olur. Buna göre,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| f(x'_{n_k}) - \lim_{k \rightarrow \infty} f(x'_{n_k}) \right| = |f(x_0) - f(x_0)| = 0$$

bulunur. Bu ise $\forall k \in \mathbb{N}$ için $|f(x'_{n_k}) - f(x''_{n_k})| \geq \varepsilon_0$ ile çelişir. Buna göre, f, X üzerinde düzgün süreklidir.

Teorem 6.2.5: $[a, b]$ aralığında sürekli her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir, yani $\mathcal{C}[a, b] \subset \mathcal{R}[a, b]$ dir.

İspat: $[a, b]$ aralığında tanımlı, sürekli bir f fonksiyonu verilsin ve $w_f : (0, b - a] \rightarrow \mathbb{R}^+$, $w_f(\delta) = \sup_{|x-y| < \delta} |f(x) - f(y)|$ fonksiyonu f 'nin süreklilik modülü

olsun. Teorem 6.2.4 den dolayı f fonksiyonu $[a, b]$ de düzgün sürekli ve $\lim_{\delta \rightarrow 0^+} w_f(\delta) = 0$ olduğundan, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}^+$ için $\exists \delta_\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ vardır öyleki her $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ için $w_f(\delta) < \frac{\varepsilon}{(b-a)}$ dir. $0 < \delta < \delta_\varepsilon$ olmak üzere $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \delta$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı verilsin. Bu durumda, $t_k, \eta_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için $|t_k - \eta_k| \leq \delta$ ise

$$|f(t_k) - f(\eta_k)| \leq w_k(f) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq w_f(\delta)$$

yazılabilir. Buna göre, $\|P\| < \delta$ olacak şekilde $P \in \mathcal{P}$ parçalanışı için

$$[M_k(f) - m_k(f) = w_k(f) \leq w_f(\delta) \text{ olduğundan}]$$

$$\begin{aligned}
\ddot{U}(f, P) - A(f, P) &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k \\
&= \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n w_f(\delta) \Delta x_k = w_f(\delta)(b - a) < \varepsilon
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $\forall \varepsilon \in \mathbb{R}_+$ için $\exists \delta > 0$ öyleki, $[a, b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde $P \in \mathcal{P}$ parçalanışı için $\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$ olur. Teorem 6.1.10'a göre $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dir.

Teorem 6.2.6: $[a, b]$ aralığında monoton (artan veya azalan) her fonksiyon bu aralık üzerinde integrallenebilirdir.

İspat: $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu monoton azalan olsun. O halde $f(a) - f(b) > 0$ dır. Herhangi $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ sayısı için $[a, b]$ aralığının $\|P\| < \frac{\varepsilon}{f(a) - f(b)}$ olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanmasını göz önüne alalım. Monoton azalan $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$ fonksiyonu için alt aralıkların her birinde $m_k(f) = f(x_k)$ ve $M_k(f) = f(x_{k-1})$ olacağından,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k &= \sum_{k=1}^n [M_k(f) - m_k(f)] \Delta x_k = \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) - f(x_k)] \Delta x_k \\ &\leq \|P\| \sum_{k=1}^n [f(x_{k-1}) - f(x_k)] = \|P\| (f(a) - f(b)) < \varepsilon \end{aligned}$$

bulunur. Riemann koşulu (Teorem 6.1.10) gerçekleştiğinden $f \in \mathcal{R}[a, b]$ dir.

İspatsız olarak vereceğimiz aşağıdaki teorem bir fonksiyonun verilen bir aralıkta integrallenebilir olması için başka bir koşuldur.

Teorem 6.2.7: $[a, b]$ aralığında sınırlı $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonsiyonunun $[a, b]$ üzerinde integrallenebilen olması için gerek ve yeter koşul f nin süreksizlik noktalarından oluşan kümenin sayılabilir olmasıdır.

RIEMANN İNTEGRALİNİN ÖZELLİKLERİ

Teorem 6.2.8 : $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ olsun. Bu durumda,

$$(a) \quad f + g \in \mathcal{R}[a, b]$$

$$(b) \quad \forall \alpha \in \mathbb{R} \text{ için } \alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$$

$$(c) \quad |f| \in \mathcal{R}[a, b]$$

(d) $[c, d] \subset [a, b]$ ise $f|_{[c, d]} \in \mathcal{R}[c, d]$.

(e) $fg \in \mathcal{R}[a, b]$.

(f) $\forall x \in [a, b]$ için $|g(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$.

İspat: (a) $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $F = f + g$ olsun. Teorem 6.2.1'den dolayı $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ kapalı aralığı üzerinde sınırlıdır. $F \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğunu görelim. $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için $[a, b]$ 'nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} \text{ ve } \sum_{k=1}^n w_k(g) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır. Her $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$w_k(F) = \sup\{|F(x) - F(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \leq w_k(f) + w_k(g)$$

olduğundan, $[a, b]$ nin $\|P\| < \delta$ olacak şekilde P parçalanması için

$$\sum_{k=1}^n w_k(F) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k + \sum_{k=1}^n w_k(g) \Delta x_k < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

olur. Bu ise Riemann koşuluna göre, $F = f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu demektir.

(b) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için

$$R(\alpha f, P, t) = \sum_{k=1}^n (\alpha f)(t_k) \Delta x_k = \alpha R(f, P, t)$$

olduğuna göre limite geçildiğinde, $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu görülür.

(c) $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned} w_k(|f|) &= \sup\{||f(x)| - |f(y)|| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} \\ &\leq \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} = w_k(f) \end{aligned}$$

olduğundan,

$$0 \leq \sum_{k=1}^n w_k(|f|) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k$$

yazabiliriz. Buradan da

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k = 0 \Rightarrow \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k(|f|) \Delta x_k = 0$$

olduğu ve dolayısıyla, $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu görülür.

(d) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $[a, d] \subset [a, b]$ olsun. $F(x) = f(x)$, $x \in [a, d]$ tanımıyla $F: [a, d] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, d]$ üzerinde Riemann anlamında integrallenebilir olduğunu görelim. $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $f, [a, b]$ üzerinde sınırlıdır. Buna göre, F fonksiyonu $[a, d]$ üzerinde sınırlıdır. $[a, d]$ aralığının herhangi bir $P' = \{x_0, x_1, \dots, x_m\}$, $(a = x_0 < x_1 < \dots < x_{m-1} < x_m = d)$ parçalanışı verilsin. $\|P'\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, m\}$ ve $x_m < x_{m+1} < \dots < x_{n-1} < x_n = b$, olmak üzere $[a, b]$ aralığının $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, 2, \dots, n\} < \|P'\|$

olacak şekilde bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_n\}$ parçalanışını göz önüne alalım.

O halde, $F|_{[a,d]}$ fonksiyonu için

$$\sum_{k=1}^m w_k(F) \Delta x_k = \sum_{k=1}^m w_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k$$

yazılabilir. Bu eşitsizlikte $\|P'\| \rightarrow 0$ iken limite geçerse $\|P'\| \rightarrow 0$ olduğundan

$\|P\| \rightarrow 0$ olduğundan $\sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k \rightarrow 0$ yazılır. Buradan

$$\lim_{\|P'\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k(F) \Delta x_k = 0$$

olduğundan $F|_{[a,d]} \in \mathcal{R}[a,d]$ olduğu görülür.

(e) $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ olsun. $fg \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğunu görelim. f ve g nin dolayısı ile $f \cdot g$ nin $[a, b]$ de sınırlı olduğu açıktır. $[a, b]$ aralığının herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned} w_k(f \cdot g) &= \sup \{ |f(x)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \} \\ &= \sup \{ |f(x)g(x) - f(y)g(x) + f(y)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \} \\ &\leq \sup \{ |f(x)g(x) - f(y)g(x)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \} + \\ &\quad + \sup \{ |f(y)g(x) - f(y)g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k] \} \\ &\leq M_k(g)w_k(f) + M_k(f)w_k(g) \leq M(g)w_k(f) + M(f)w_k(g) \end{aligned}$$

olduğundan

$$0 \leq \sum_{k=1}^n w_k(f \cdot g) \Delta x_k \leq M(g) \sum_{k=1}^n w_k(f) \Delta x_k + M(f) \sum_{k=1}^n w_k(g) \Delta x_k$$

yazılabilir. $\|P\| \rightarrow 0$ sağ tarafın limiti sıfır olduğundan

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k(f \cdot g) \Delta x_k = 0$$

yani, $f \cdot g \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu anlaşılır.

(f) $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için

$$\begin{aligned} w_k\left(\frac{1}{g}\right) &= \sup\left\{\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(y)}\right| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\right\} \\ &\leq \frac{1}{\beta^2} \sup\{|g(x) - g(y)| : x, y \in [x_{k-1}, x_k]\} = \frac{1}{\beta^2} w_k(g) \end{aligned}$$

olup

$$0 \leq \sum_{k=1}^n w_k \left(\frac{1}{g} \right) \Delta x_k \leq \frac{1}{\beta^2} \sum_{k=1}^n w_k(g) \Delta x_k$$

yazılabilir. Buradan, $g \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k(g) \Delta x_k = 0$ olur. O zaman son eşitsizlik ile

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n w_k \left(\frac{1}{g} \right) \Delta x_k = 0$$

olup $\frac{1}{g} \in \mathcal{R}[a, b]$ sonucu ortaya çıkar.

Not: (e) ve (f) den $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $|g(x)| \geq \beta > 0$ ise $\frac{f}{g}$ nin de $[a, b]$ de integrallenebilir olduğu elde edilir.

UYARI: Bu Teoremdeki önermelerin tersi genelde doğru değildir. Örneğin,
 $D: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonunun $[0, 1]$ üzerinde integrallenemez olduğunu biliyoruz. $[0, 1]$ üzerinde integrallenemez $f(x) = D(x)$ ve $g(x) = -D(x)$ fonksiyonlarının toplamı olan $f(x) + g(x) = 0$ fonksiyonu $[0, 1]$ üzerinde integrallenebilirdir.

Teorem 6.2.9 : $f \in \mathcal{R}[a, b]$ için

$$(a) \int_a^a f(x) dx = 0$$

$$(b) \int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$$

Teorem 6.2.10: (a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $g \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ için $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$ dir ve

$$\int_a^b [f(x) + g(x)] dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,$$

$$\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$$

eşitlikleri doğrudur.

(b) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $a < c < b$ ise $f \in \mathcal{R}[a, c], f \in \mathcal{R}[c, b]$ dir ve

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

dir. Bu sonuca Riemann integralinin Toplamsallık Özelliği denir.

(c) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \geq 0$ ise $\int_a^b f(x) dx \geq 0$ dir.

(**d**) $f, g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ (veya $f(x) < g(x)$) ise

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad \left(\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx \right)$$

dir.

(**e**) $f \in \mathcal{R}[a, b], \forall x \in [a, b]$ için $q \leq f(x) \leq p$ ise

$$q(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq p(b-a)$$

dir.

(**f**) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ ise $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ dir ve

$$\left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

dir.

İspat: (a) $f \in \mathcal{R}[a, b]$, $g \in \mathcal{R}[a, b]$ için $f + g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\alpha f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğu Teorem 6.2.8(a) ve (b) den bellidir. $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için

$$R(f + g, P, t) = R(f, P, t) + R(g, P, t)$$

yazılabilir. Üstelik $f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = \int_a^b f(x) dx$ ve $g \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(g, P, t) = \int_a^b g(x) dx$ limitleri mevcut olduğundan yukarıdaki eşitlikte $\|P\| \rightarrow 0$ iken limite geçerse

$$\begin{aligned}
\int_a^b [f(x) + g(x)] dx &= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f + g, P, t) \\
&= \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) + \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(g, P, t) \\
&= \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx,
\end{aligned}$$

Elde edilir. Benzer yöntemle $\int_a^b \alpha f(x) dx = \alpha \int_a^b f(x) dx$ gösterilebilir.

(b) $f \in \mathcal{R}[a, b]$ için Teorem 6.2.8 (d) den dolayı $f \in \mathcal{R}[a, c]$ ve $f \in \mathcal{R}[c, b]$ dır.

$f \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan $\int_a^b f(x) dx$ integrali

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t)$$

limiti gibi hesaplandığında $[a, b]$ aralığının bu limitin hesaplanması için kolaylık sağlayan parçalanmalarından kullanabiliriz. Bu nedenle, böyle parçalanmalar olarak $[a, b]$ aralığının c noktası bir bölüm noktası olan parçalanmalarından kullanalım. $[a, b]$ aralığının c noktası bir bölüm noktası olan işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için $P' = P \cap [a, c]$, $P'' = P \cap [c, b]$, $P = P' \cup P''$ ve $t = (t', t'')$ olmak üzere (P', t') ve (P'', t'') sırası ile $[a, c]$ ve $[c, b]$ aralıklarının işaretlenmiş parçalanmaları olacaktır. Buna göre

$$R(f, P, t) = R(f, P', t') + R(f, P'', t'')$$

eşitliği sağlanır. $\|P'\| \leq \|P\|$ ve $\|P''\| \leq \|P\|$ olduğundan $\|P\| \rightarrow 0$ iken $\|P'\| \rightarrow 0$ ve $\|P''\| \rightarrow 0$ olur. $\lim_{\|P'\| \rightarrow 0} R(f, P', t') = \int_a^b f(x) dx$ ve

$\lim_{\|P'\| \rightarrow 0} R(f, P'', t'') = \int_c^b f(x)dx$ limitleri mevcut olduğundan üstteki eşitlikte

$\|P\| \rightarrow 0$ iken limite geçerse $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$ bulunur.

(c) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için $f(t_k) \geq 0$ ve $\Delta x_k - x_{k-1} > 0$ olduğundan, $R(f, P, t) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k \geq 0$ yazılabilir. Bu durumda, $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = I \geq 0$ olduğunu görelim. $I < 0$ ve $\varepsilon = |I| > 0$

olsun. $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = I \Rightarrow [a, b]$ aralığının işaretlenmiş öyle bir $(\tilde{P}, \tilde{t})$

parçalanması vardır ki $|R(f, \tilde{P}, \tilde{t}) - I| < |I| \Rightarrow R(f, \tilde{P}, \tilde{t}) < |I| + I = 0$ olur.

Bu da $[a, b]$ nin işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için $R(f, P, t) \geq 0$ olması ile çeliştiğinden $I \geq 0$ dır.

(d) $f \in \mathcal{R}[a, b], g \in \mathcal{R}[a, b]$ ve $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) \leq g(x)$ (veya $f(x) < g(x)$) olsun. Bu durumda, $\varphi(x) = g(x) - f(x)$ fonksiyonu için $\varphi \in \mathcal{R}[a, b]$ için $\varphi(x) \geq 0$ (veya $\varphi(x) > 0$) olacağından (c)'ye göre $\int_a^b \varphi(x) dx \geq 0$ (veya $\int_a^b \varphi(x) dx > 0$) bulunur. Buradan istenen eşitsizliğin sağlandığı anlaşılır.

(e) $[a, b]$ aralığının işaretlenmiş her (P, t) parçalanması için $q\Delta x_k \leq f(t_k)\Delta x_k \leq p\Delta x_k, k = 1, \dots, n$ eşitsizlikleri sağlandığından ve $\sum_{k=1}^n \Delta x_k = b - a$ olduğundan dolayı

$$q(b - a) \leq \mathcal{R}(f, P, t) \leq p(b - a)$$

yazılabilir. Buradan $\|P\| \rightarrow 0$ limit alınırsa $q(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq p(b-a)$ olur.

(f) $|f| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğunu Teorem 6.2.8(c) den biliyoruz. Herhangi bir $x \in [a, b]$ için $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$ eşitsizliği sağlandığından ve $|f(x)|, -|f(x)| \in \mathcal{R}[a, b]$ olduğundan dolayı (d) ye göre

$$-\int_a^b |f(x)|dx \leq \int_a^b f(x) \leq \int_a^b |f(x)|dx$$

eşitsizliğin doğru olduğu görülür.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



30

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERİLMİZ

Ders 12