



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

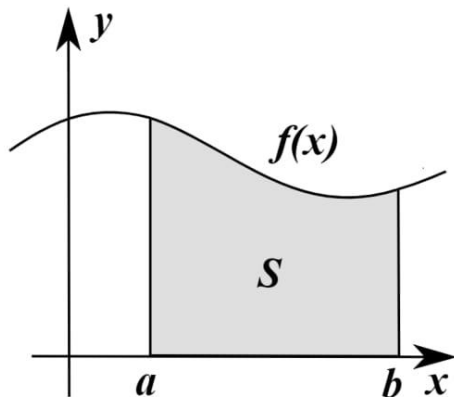
Analiz II
Belirli İntegral (Riemann İntegrali)

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 11

6. BELİRLİ İNTEGRAL (RIEMANN İNTEGRALI)

Üçgen, dikdörtgen, kare veya yamuk gibi düzlemsel bölgelerin alanlarını hesaplamak için alan formülleri kullanabiliriz. Ancak bölgenin sınırları doğru parçalarından oluşmamış ve eğrisel bir bölge ise integral yardımıyla alan hesaplanır.



Bu bölümde reel eksenin kapalı ve sınırlı aralığı üzerinde tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların Riemann (Belirli) integrali tanıtılacak ve bazı uygulamalarından söz edilecektir.

Tanım 6.1: $[a, b]$ ($a, b \in \mathbb{R}$) aralığının $a = x_0 < x_1 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ koşulunu sağlayan her

$$P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$$

sonlu alt kümesine $[a, b]$ aralığının bir **parçalanışı** (veya bölüntüsü); $k = 0, 1, 2, \dots, n$ için x_k noktalarına bu parçalanışın bölüm noktaları; ve yine $\forall k \in \{1, 2, \dots, n\}$ için $[x_{k-1}, x_k]$ ((x_{k-1}, x_k)) aralıklarına $[a, b]$ nin P parçalanışına karşılık gelen kapalı (açık) alt aralıkları adı verilir.

$\Delta x_k = x_k - x_{k-1} > 0$ sayılarına $[x_{k-1}, x_k]$ aralığının boyu (veya ölçüsü) denir.

$\Delta x_1, \dots, \Delta x_n$ sayılarının en büyüğüne P parçalanışının **normu** (veya çapı) denir ve $\|P\|$ ile gösterilir. Şu halde $\|P\| = \max\{\Delta x_k : k = 1, \dots, n\}$ dır.

Eğer $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \dots = \Delta x_n$, yani $k = 1, \dots, n$ için $\Delta x_k = \frac{b-a}{n}$ ise, P ye $[a, b]$ nin **düzgün** parçalanışı adı verilir.

ÖR: Örneğin $[0, 2]$ aralığı için $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$, $P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{17}{9}, 2\right\}$ ve

$P_3 = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{4}, 1, \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}, 2\right\}$ kümeleri birer parçalanıştır.

➤ $P_1 = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\}$ için $s(P_1) = 5$ olup kapalı alt aralıklar

$\left[0, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, 1\right], \left[1, \frac{3}{2}\right], \left[\frac{3}{2}, 2\right]$ bulunur. Bu alt aralıklar için boyları

$\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_3 = \Delta x_4 = \frac{1}{2}$ olur. $\|P_1\| = \frac{1}{2}$ olup P_1 düzgün bir parçalanıştır.

➤ $P_2 = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, \frac{17}{9}, 2\right\}$ için $s(P_2) = 7$ olup kapalı alt aralıklar

$\left[0, \frac{1}{3}\right], \left[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}\right], \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5}\right], \left[\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right], \left[\frac{4}{5}, \frac{17}{9}\right], \left[\frac{17}{9}, 2\right]$ bulunur. Bu alt aralıklar için

boyları $\Delta x_1 = \frac{1}{3}, \Delta x_2 = \frac{1}{6}, \Delta x_3 = \frac{1}{10}, \Delta x_4 = \frac{1}{5}, \Delta x_5 = \frac{49}{45}, \Delta x_6 = \frac{1}{9}$ olur.

$\|P_2\| = \frac{49}{45}$ olup P_1 düzgün bir parçalanış değildir.

➤ $P_3 = \left\{0, \frac{\sqrt{2}}{4}, 1, \frac{\pi}{2}, \sqrt{3}, 2\right\}$ için $s(P_3) = 6$ olup kapalı alt aralıklar

$\left[0, \frac{\sqrt{2}}{4}\right], \left[\frac{\sqrt{2}}{4}, 1\right], \left[1, \frac{\pi}{2}\right], \left[\frac{\pi}{2}, \sqrt{3}\right]$ ve $[\sqrt{3}, 2]$ bulunur. Bu alt aralıkların

boyları $\Delta x_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $\Delta x_2 = \frac{4-\sqrt{2}}{4}$, $\Delta x_3 = \frac{\pi-2}{2}$, $\Delta x_4 = \frac{2\sqrt{3}-\pi}{2}$, $\Delta x_5 = 2-\sqrt{3}$

olur. $\|P_3\| = \frac{4-\sqrt{2}}{4}$ olup P_3 düzgün bir parçalanış değildir.

Tanım 6.2: $[a, b]$ aralığının iki parçalanışı P_1 ve P_2 olsun. Eğer $P_1 \subset P_2$ ise P_2 ye P_1 in incelmesi veya P_1 parçalanışına P_2 parçalanışından kaba denir.

Bu durumda $\|P_2\| \leq \|P_1\|$ olduğu açıktır. $P_1 \subset P_2 \subset P_3 \subset \dots \subset P_n \subset \dots$ koşulunu sağlayan (P_n) dizisine incelme dizisi denir.

Örneğin, $[a, b]$ aralığının $P_1 = \{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1\}$ ve $P_2 = \{0, \frac{1}{6}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{5}{6}, 1\}$ parçalanışları için $P_1 \subset P_2$ olduğundan P_2 , P_1 in incelmesidir ve $\|P_2\| = \frac{1}{6} < \frac{1}{3} =$

$\|P_1\|$ dir. $[a, b]$ aralığının iki P_1 ve P_2 parçalanışı için $P^* = P_1 \cup P_2$ ise, P^* , P_1 ve P_2 nin ortak incelmesidir.

Tanım 6.3: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sınırlı olsun. $[a, b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı için $1 \leq k \leq n$ olmak üzere

$$m_k(f) = \inf \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$M_k(f) = \sup \{f(x) : x \in [x_{k-1}, x_k]\}$$

olsun.

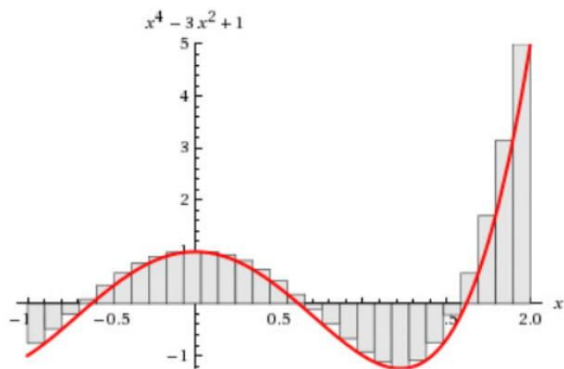
$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k, \quad \ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k$$

toplamlarına sırasıyla f fonksiyonunun $[a, b]$ nin P parçalanışına göre alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı adı verilir. $1 \leq k \leq n$ için $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ alt aralığından alınan herhangi bir nokta olmak üzere

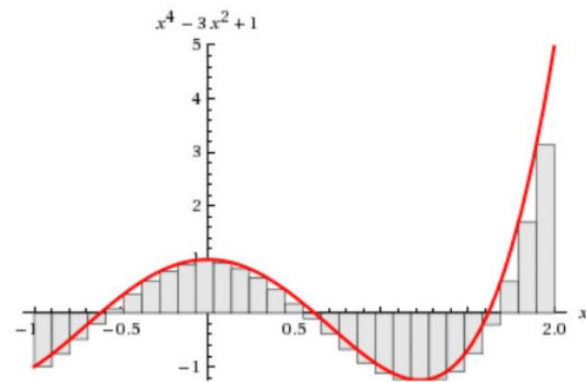
$$R(f, P, t) = \sum_{k=1}^n f(t_k) \Delta x_k$$

toplama f fonksiyonunun $[a, b]$ nin P parçalanışına göre Riemann toplamı (veya Riemann integral toplamı) adı verilir ve $t = (t_1, \dots, t_n)$ ile gösterilir.

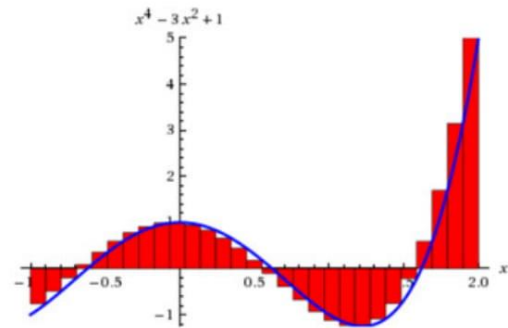
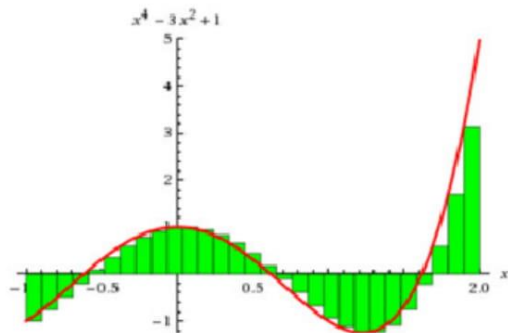
Örneğin, $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^4 - 3x^2 + 1$ için $[-1, 2]$ aralığının düzgün bir 30 elemanlı parçalanışı için alt Darboux toplamı ve üst Darboux toplamı



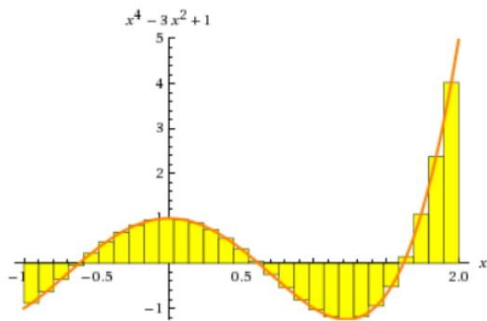
f fonksiyonunun üst Darboux toplamı



f fonksiyonunun alt Darboux toplamı



f fonksiyonunun sol ve sağ uç nokta kurallı Riemann toplamı



f fonksiyonunun orta nokta kurallı Riemann toplamı

Not: Sınırlı $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu sabit tutulduğunda $A(f, P)$ ve $\bar{U}(f, P)$ Darboux toplamı yalnızca $[a, b]$ nin P parçalanışına, $R(f, P)$ Riemann toplamı ise hem P parçalanışının hem de $t_k \in [x_{k-1}, x_k] (k = 1, \dots, n)$ olmak üzere $t = (t_1, \dots, t_n)$ n -lisinin seçilişine bağlıdır. Buna göre $R(f, P)$ toplamı çoğu kez $R(f, P, t)$ ile gösterilir.

Eğer, $[a, b]$ nin bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı ve her bir $[x_{k-1}, x_k]$ aralığında herhangi bir t_k noktası seçilmişse $[a, b]$ nin bir işaretlenmiş (P, t) parçalanışı verilmiştir diyeceğiz.

Sınırlı bir $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $[a, b]$ aralığının herhangi işaretlenmiş bir (P, t) parçalanışı verilsin. $1 \leq k \leq n$ olmak üzere $t_k \in [x_{k-1}, x_k]$ için $m_k(f) \leq f(t_k) \leq M_k(f)$ olduğundan,

$$A(f, P) \leq R(f, P, t) \leq \ddot{U}(f, P)$$

olacağı açıktır.

Teorem 6.4: P ve $P_0, [a, b]$ aralığının iki parçalanışı ve $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı olsun. Eğer, $P_0 \subset P$ ise

$$A(f, P_0) \leq A(f, P) \quad \text{ve} \quad \ddot{U}(f, P) \leq \ddot{U}(f, P_0)$$

dir.

İspat: İspatı önce şu özel hal için yapalım. $[a, b]$ nin $P_0 = \{x_0, x_1, \dots, x_{k_0-1}, x_{k_0}, \dots, x_n\}$ ve $P = \{x_0, x_1, \dots, x_{k_0-1}, x^*, x_{k_0}, \dots, x_n\}$ parçalanışları verilsin. $P_0 \subset P$ olduğu açık olup

$$m_k(f) = \inf\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\}, \quad M_k(f) = \sup\{f(x): x \in [x_{k-1}, x_k]\},$$

$$m'_{k_0}(f) = \inf\{f(x): x \in [x_{k_0-1}, x^*]\}, \quad M'_{k_0}(f) = \sup\{f(x): x \in [x_{k_0-1}, x^*]\},$$

$$m''_{k_0}(f) = \inf\{f(x): x \in [x^*, x_{k_0}]\}, \quad M''_{k_0}(f) = \sup\{f(x): x \in [x^*, x_{k_0}]\},$$

denirse, $k = 1, 2, \dots, n$ için

$$m_k(f) \leq M_k(f), \quad m_k(f) \leq m'_{k_0}(f), \quad m_k(f) \leq m''_{k_0}(f), \quad M'_{k_0}(f) \leq M_k(f) \quad \text{ve}$$

$$M''_{k_0}(f) \leq M_k(f) \quad \text{olduğundan}$$

$$\begin{aligned}
A(f, P) &= \sum_{k=1}^{k_0-1} m_k(f) \Delta x_k + m'_{k_0}(f)(x^* - x_{k_0-1}) + m''_{k_0}(f)(x_{k_0} - x^*) \\
&\quad + \sum_{k=k_0+1}^n m_k(f) \Delta x_k \\
&\geq \sum_{k=1}^{k_0-1} m_k(f) \Delta x_k + m_{k_0}(f)(x^* - x_{k_0-1}) + m_{k_0}(f)(x_{k_0} - x^*) \\
&\quad + \sum_{k=k_0+1}^n m_k(f) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k = A(f, P_0)
\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer şekilde, $\ddot{U}(f, P) \leq \ddot{U}(f, P_0)$ olduğu gösterilir.

Şimdi kabul edelim ki, P nin P_0 dan r tane fazla noktası olsun. Bu noktalara $x_1^*, \dots, x_r^*$ diyelim. $[a, b]$ aralığının $P_1 = P_0 \cup \{x_1^*\}, P_2 = P_1 \cup \{x_2^*\}, \dots, P_r = P_{r-1} \cup \{x_r^*\}$ parçalanışları için $P_0 \subset P_1 \subset \dots \subset P_{r-1} \subset P_r = P$ olduğuna göre, yukarıdaki ispattan $A(f, P_0) \leq A(f, P_1) \leq \dots \leq A(f, P_r) = A(f, P)$ ve $\ddot{U}(f, P_0) \geq \ddot{U}(f, P_1) \geq \dots \geq \ddot{U}(f, P_r) = \ddot{U}(f, P)$ eşitsizlikleri ve dolayısıyla,

$$A(f, P_0) \leq A(f, P) \text{ ve } \ddot{U}(f, P) \leq \ddot{U}(f, P_0)$$

eşitsizliklerinin doğru olduğu elde edilir.

Teorem 6.5 : P_1 ve $P_2, [a, b]$ aralığının herhangi iki parça alınması ve $f, [a, b]$ üzerinde tanımlı sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$A(f, P_1) \leq \ddot{U}(f, P_2).$$

İspat: $P^* = P_1 \cup P_2$ olsun P^*, P_1 ve P_2 parçalanışlarının ortak incelmesi olduğundan Teorem 6.4 ile

$$A(f, P_1) \leq A(f, P^*) \text{ ve } \ddot{U}(f, P^*) \leq \ddot{U}(f, P_2)$$

yazılabilir. Öte yandan P^* parçalanışı için $A(f, P^*) \leq \ddot{U}(f, P^*)$ olduğundan son eşitsizlikten $A(f, P_1) \leq \ddot{U}(f, P_2)$ yazılabilir.

Sonuç 6.6: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve $m(f) = \inf\{f(x): x \in [a, b]\}$ ve $M(f) = \sup\{f(x): x \in [a, b]\}$ olsun. Bu durumda $[a, b]$ aralığının her $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışı için

$$m(f)(b - a) \leq A(f, P) \leq \ddot{U}(f, P) \leq M(f)(b - a)$$

dir.

Gerçekten, her $k \in 1, 2, \dots, n$ için $m_k(f) \geq m(f)$ ve $M_k(f) \leq M(f)$ olduğundan
 $(E, F \subset \mathbb{R} \text{ ve } E \subset F \text{ için } \inf E \geq \inf F, \sup E \leq \sup F)$

$$A(f, P) = \sum_{k=1}^n m_k(f) \Delta x_k \geq \sum_{k=1}^n m(f) \Delta x_k = m(f)(b - a),$$

$$\ddot{U}(f, P) = \sum_{k=1}^n M_k(f) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n M(f) \Delta x_k = M(f)(b - a)$$

yazılabilir. $A(f, P) \leq \ddot{U}(f, P)$ olduğundan sonuç görülür.

Sonuç: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon ve (P_n) ise $[a, b]$ aralığının parçalanışlarının artan bir dizisi (yani $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n \subset P_{n+1}$) olsun. $(A(f, P_n))$

alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $\ddot{U}(f, P_n))$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlıdır.

Gerçekten, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n \subset P_{n+1}$ olduğundan, Teorem 6.4'den dolayı $A(f, P_n) \leq A(f, P_{n+1})$ ve $\ddot{U}(f, P_{n+1}) \leq \ddot{U}(f, P_n)$ yazılabilir. Bu ve Sonuç 6.6'ya göre $(A(f, P_n))$ dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $(\ddot{U}(f, P_n))$ dizisi ise artmayan ve alttan sınırlıdır.

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon $\mathcal{P}$ de $[a, b]$ aralığının bütün mümkün $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanışlarından oluşan bir küme olsun. Sonuç 6.6'dan $\{A(f, P): P \in \mathcal{P}\}$ kümesi üstten, [Çünkü $\forall P \in \mathcal{P}$ için $A(f, P) \leq M(f)(b - a)$] ve $\{\ddot{U}(f, P): P \in \mathcal{P}\}$ kümesi alttan [Çünkü $\forall P \in \mathcal{P}$ için $\ddot{U}(f, P) \geq m(f)(b - a)$]

sınırlı birer reel sayı kümeleridir. Bu nedenle, bu kümelerin sırasıyla supremumu ve infimumu vardır.

Tanım 6.7 : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun.

$$\underline{I} = \sup\{A(f, P): P \in \mathcal{P}\} \quad \text{ve} \quad \bar{I} = \inf\{\bar{U}(f, P): P \in \mathcal{P}\}$$

sayılarına f fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki sırası ile alt integrali ve üst integrali denir.

Teorem 6.8 : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\underline{I} \leq \bar{I}$ dır.

İspat: $[a, b]$ aralığının herhangi iki P_1 ve P_2 parçalanışları verilsin. Teorem 6.5'den dolayı

$$A(f, P_1) \leq \bar{U}(f, P_2)$$

yazılabilir. P_2 parçalanışı sabit tutarak P_1 in $\mathcal{P}$ kümesi üzerinde değişmesi halinde elde edilen $\{A(f, P_1): P_1 \in \mathcal{P}\}$ kümesi üstten sınırlı olduğundan ($E \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $B \in \mathbb{R}$ sayısı için $\forall x \in E, x \leq B$ olduğundan $\sup E \leq B$ dir.)

$$\underline{I} = \sup\{A(f, P_1): P_1 \in \mathcal{P}\} \leq \ddot{U}(f, P_2)$$

dır. Buna göre, $\{\ddot{U}(f, P_2): P_2 \in \mathcal{P}\}$ kümesi alttan sınırlı olduğundan ($F \subset \mathbb{R}$ alt kümesi ve $c \in \mathbb{R}$ sayısı için $\forall x \in F, x \geq c$ olduğundan $\inf F \geq c$ dir)

$$\bar{I} = \inf\{\ddot{U}(f, P_2): P_2 \in \mathcal{P}\} \geq \underline{I}$$

olduğu elde edilir.

Not: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon, (P_n) de $[a, b]$ aralığının $\lim_{n \rightarrow \infty} \|P_n\| = 0$ olacak şekilde parçalanışlarının artan bir dizisi olsun. $(A(f, P_n))$ alt toplamlar dizisi azalmayan ve üstten sınırlı, $(\ddot{U}(f, P_n))$ üst toplamlar dizisi artmayan ve alttan sınırlı olduğundan, monoton dizi özelliklerine göre bu dizilerin birer limitleri vardır. Bu nedenle sınırlı $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerindeki alt ve üst integralleri sırası ile

$$\underline{I} = \lim_{n \rightarrow \infty} A(f, P_n) = \sup\{A(f, P_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\bar{I} = \lim_{n \rightarrow \infty} \ddot{U}(f, P_n) = \inf\{\ddot{U}(f, P_n) : n \in \mathbb{N}\}$$

gibi tanımlanabilir.

Tanım 6.9: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde sınırlı $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu için $[a, b]$ nin P parçalanışı ve t ye bağımlı olmayarak,

$$\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, \xi) = \lim_{\|P\| \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \Delta x_k = I$$

sonlu limiti varsa bu limite f nin $[a, b]$ üzerinde Riemann (veya Belirli) integrali denir ve bu limit $\int_a^b f(x) dx$ ile gösterilir.

Bu durumda f , $[a, b]$ üzerinde integrallenebilirdir (Riemann anlamında) denir ve $f \in \mathfrak{R}([a, b])$ ile gösterilir. a ve b sayılarına integralin sırası ile alt ve üst sınırları denir.

Yukarıdaki limit şu anlamdadır: $\lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, t) = I \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0$ için $\|P\| < \delta$ olan her işaretlenmiş (P, t) parçalanışı için $|R(f, P, t) - I| < \varepsilon$ olacak şekilde $\exists \delta > 0$ vardır.

Teorem 6.10 : $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Aşağıdaki önermeler denktirler.

$$(a) \underline{I} = \bar{I}$$

(b) $\forall \varepsilon > 0$ için $[a, b]$ aralığının $\ddot{U}(f, P) - A(f, P) < \varepsilon$ olacak şekilde bir $P = P_\varepsilon$ parçalanışı vardır.

$$(c) \lim_{\|P\| \rightarrow 0} R(f, P, \xi) = I = \int_a^b f(x) dx \text{ limiti vardır ve } I = \underline{I} = \bar{I} \text{ dir.}$$

ÖR: $[a, b] \subset \mathbb{R}$ üzerinde tanımlı $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun $[a, b]$ üzerinde integrallenebilir olması için f fonksiyonunun $[a, b]$ de sınırlı olması koşulu gereklidir, fakat yeterli değildir. Örneğin,

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in [a, b] \cap \mathbb{Q} \\ 0, & x \notin [a, b] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

biçiminde tanımlı Dirichlet fonksiyonu $D: [a, b] \rightarrow \{0, 1\}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sınırlıdır fakat integrallenebilir değildir. Gerçekten, $[a, b]$ aralığının herhangi bir $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ parçalanması için $\tilde{t}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ rasyonel ve $\tilde{\tilde{t}}_k \in [x_{k-1}, x_k]$ irrasyonel sayılar olmak üzere

$$R(D, P, \tilde{t}) = \sum_{k=1}^n D(\tilde{t}_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 1 \Delta x_k = b - a,$$

$$R(D, P, \tilde{t}) = \sum_{k=1}^n D(\tilde{t}_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n 0 \Delta x_k = 0$$

olduğundan $b - a \neq 0$ durumunda $\lim_{\|p\| \rightarrow 0} R(D, P, t)$ limiti yoktur. Buna göre, verilen D fonksiyonu her $[a, b]$ aralığı üzerinde integrallenemezdir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



26

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 11