



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Dijital Ders Platformu

Analiz II

Trigonometrik Değişken Değiştirme
Basit Kesirlere Ayırma Yöntemi

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 10

5.6. TRİGONOMETRİK DEĞİŞKEN DEĞİŞTİRME:

Integral alınırken özellikle köklü ifadelerin içinde 1li terimli ifadeler için trigonometrik değişken değiştirmeden faydalanılır.

$a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$a^2 - u^2$ şeklinde terim varsa $u = a \sin t$ deg. değişimi

$a^2 + u^2$ " " " " $u = a \tan t$ " "

$u^2 - a^2$ " " " " $u = a \sec t$ " "

yapılır.

ÖR: $I = \int \frac{x^3}{\sqrt{1-x^2}} dx$ integrali için payda dikkate alınırsa

olup $I = \int \frac{\sin^3 t}{\sqrt{1-\sin^2 t}} \cdot \cos t \cdot dt = \int \sin^3 t \cdot dt = \int \sin t \cdot (1 - \cos^2 t) dt$

$\left(\begin{matrix} \cos t = u \\ \text{ile} \end{matrix} \right) I = \int -du \cdot (1 - u^2) = \frac{u^3}{3} - u = \frac{\cos^3 t}{3} - \cos t$ olur.

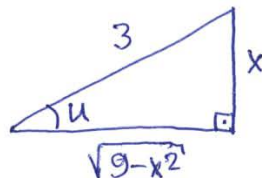
$\sin t = x$ idi. Buradan diküçgen ile $\cos t = \sqrt{1-x^2}$ olup
 $I = \frac{1}{3} (1-x^2)^{3/2} - \sqrt{1-x^2} + c$ olur.

ÖR: $J = \int \frac{1}{x^2 \sqrt{9-x^2}} dx$ için $\boxed{x = 3 \sin u}$ alınırsa $dx = 3 \cos u \cdot du$

olup $J = \int \frac{1}{9 \sin^2 u \cdot 3 \cos u} \cdot 3 \cos u \cdot du = \frac{1}{9} \int \operatorname{cosec}^2 u \cdot du$

$$= -\frac{1}{9} \cot u = -\frac{1}{9} \frac{\sqrt{9-x^2}}{x} + c$$

bulunur.



ÖR: $M = \int \sqrt{5+4x^2} \cdot dx$ için

$$1 + \tan^2 u = \sec^2 u$$

$$5 + 5 \tan^2 u = 5 \sec^2 u$$

$$5 + 4x^2$$

$\boxed{2x = \sqrt{5} \tan u}$ değ. değişimi ile
 $2 \cdot dx = \sqrt{5} \sec^2 u \cdot du$ olup

$$M = \int \sqrt{5+4x^2} dx = \int \sqrt{5} \sec u \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} \sec^2 u \cdot du$$

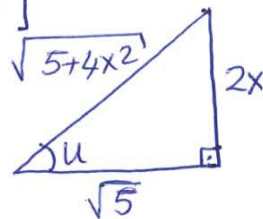
$$M = \frac{5}{2} \int \sec^3 u \cdot du = \frac{5}{2} \int \underbrace{\sec u}_u \cdot \underbrace{\sec^2 u}_{dv} \cdot du$$

$$= \frac{5}{2} \left[\sec u \cdot \tan u - \int \tan^2 u \cdot \sec u \cdot du \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\sec u \cdot \tan u - \int (\sec^2 u - 1) \cdot \sec u \cdot du \right]$$

$$= \frac{5}{2} \left[\sec u \cdot \tan u - M + \ln |\tan u + \sec u| \right]$$

$$M = \frac{5}{7} \left[\sec u \cdot \tan u + \ln |\tan u + \sec u| \right]$$



$$M = \frac{5}{7} \left[\frac{\sqrt{5+4x^2}}{\sqrt{5}} \cdot \frac{2x}{\sqrt{5}} + \ln \left| \frac{2x}{\sqrt{5}} + \frac{\sqrt{5+4x^2}}{\sqrt{5}} \right| \right] + c \text{ olur.}$$

ÖR: $S = \int \sqrt{x^2 - 3x - 4} \, dx = ?$ Kökünü tani İki terimli yapalım.

$$\sqrt{x^2 - 3x - 4} = \sqrt{x^2 - 3x + \frac{9}{4} - \frac{9}{4} - 4} = \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \text{ olup}$$

$$\left. \begin{array}{l} \sec^2 u - 1 = \tan^2 u \\ \frac{25}{4} \sec^2 u - \frac{25}{4} = \frac{25}{4} \tan^2 u \\ \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4} \end{array} \right\} \rightarrow \boxed{x - \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \sec u} \text{ alalım.}$$

$$dx = \frac{5}{2} \sec u \cdot \tan u \cdot du \text{ olup}$$

$$S = \int \sqrt{x^2 - 3x - 4} \cdot dx = \int \sqrt{\left(x - \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{25}{4}} \cdot dx$$

$$S = \int \sqrt{\frac{25}{4} \sec^2 u - \frac{25}{4}} \cdot \frac{5}{2} \sec u \cdot \tan u \cdot du = \frac{25}{4} \int \sec u \cdot \tan^2 u \, du$$

$$= \frac{25}{4} \left[\int \sec^3 u \, du - \int \sec u \, du \right] = \frac{25}{4} \left[\frac{\sec u \tan u}{2} - \frac{\ln |\tan u + \sec u|}{2} \right]$$

$$= \frac{25}{8} \left[\frac{25}{4} \left(x - \frac{3}{2}\right) \sqrt{x^2 - 3x - 4} - \frac{1}{2} \ln \left| \frac{\left(x - \frac{3}{2}\right) + \sqrt{x^2 - 3x - 4}}{5/2} \right| \right] + C \text{ olur.}$$

ÖR: $N = \int \frac{1}{(4x^2+9)^2} dx = ?$

$$\begin{aligned} 1 + \tan^2 u &= \sec^2 u \\ 9 + 9 \tan^2 u &= 9 \sec^2 u \\ 9 + 4x^2 & \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \underline{2x = 3 \tan u}$$

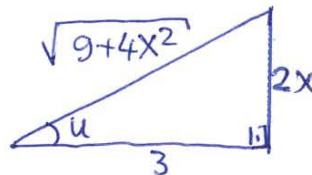
alınırsa

$$N = \int \frac{1}{(9 + 9 \tan^2 u)^2} \cdot \frac{3}{2} \sec^2 u \cdot du$$

$$= \int \frac{1}{81 \cdot \sec^4 u} \cdot \frac{3}{2} \sec^2 u \cdot du = \frac{1}{54} \int \frac{1}{\sec^2 u} \cdot du = \frac{1}{54} \int \cos^2 u \cdot du$$

$$= \frac{1}{54} \int \frac{1 + \cos 2u}{2} du = \frac{1}{108} \left(u + \frac{\sin 2u}{2} \right)$$

$$= \frac{1}{108} \left(\arctan \frac{2x}{3} + \frac{6x}{9 + 4x^2} \right) + C \text{ olur.}$$

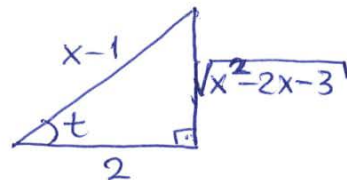


ÖR: $J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}} dx = ?$ $x^2-2x-3 = (x-1)^2-4$ olup

$J = \int \frac{1}{\sqrt{x^2-2x-3}} dx = \int \frac{1}{\sqrt{(x-1)^2-4}} dx$ için $\boxed{x-1 = 2\sec t}$ alınırsa
 $dx = 2\sec t \cdot \tan t \cdot dt$

olup $J = \int \frac{1}{\sqrt{4\sec^2 t - 4}} \cdot 2\sec t \cdot \tan t \cdot dt \Rightarrow$

$J = \int \sec t \cdot dt = \ln |\tan t + \sec t|$
 $= \ln \left| \frac{\sqrt{x^2-2x-3} + x-1}{2} \right| + C$



ÖR: $I = \int \frac{1}{\sqrt{9x^2-12x+20}} dx$ integrali için $3x^2-12x+20 = (3x-2)^2+16$

olduğundan $\boxed{3x-2 = 4\tan u}$ değişken değişimi
 yapılmalıdır.

ÖR: $M = \int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2-8x}} dx = ?$

$$M = \int \frac{x+3}{\sqrt{2x^2-8x}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x+3}{\sqrt{x^2-4x+4-4}} dx = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{x+3}{\sqrt{(x-2)^2-4}} dx$$

olup $x-2=u$ alırsa $M = \frac{1}{\sqrt{2}} \int \frac{u+5}{\sqrt{u^2-4}} du$ olup

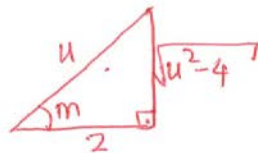
$$M = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int \frac{u}{\sqrt{u^2-4}} du + \int \frac{5}{\sqrt{u^2-4}} du \right]$$

$\nearrow u^2-4=t$ $\nearrow u=2\sec m$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\int \frac{dt/2}{\sqrt{t}} + \int \frac{5 \cdot 2\sec m \cdot \tan m \cdot dm}{2\tan m} \right]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{t} + 5 \ln |\tan m + \sec m| \right)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{u^2-4} + 5 \ln \left| \frac{u+\sqrt{u^2-4}}{2} \right| \right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{x^2-4x} + 5 \ln \left| \frac{x-2+\sqrt{x^2-4x}}{2} \right| \right) + C$$



5.7. BASİT KESİRLERE AYIRMA YÖNTEMİ:

$p(x)$, $q(x)$ İki polinom olmak üzere $\text{der}(p(x))=n$, $\text{der}(q(x))=m$ olsun. Bu bölümde $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ için $\int f(x)dx$ integralini hesaplayacağız.

(i) $n \geq m$ ise $f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}$ polinom bölmeyle

$$f(x)=\frac{p(x)}{q(x)}=b(x)+\frac{k(x)}{q(x)} \text{ şeklinde yazılır. } \int f(x)dx$$

$$\text{İçin } \int f(x)dx = \int \left[b(x) + \frac{k(x)}{q(x)} \right] dx = \underbrace{\int b(x)dx}_{(1)} + \underbrace{\int \frac{k(x)}{q(x)} dx}_{(2)}$$

olup (1) integrali kolaydır.

(2) integrali için $\text{der}(k(x)) < \text{der}(q(x))$ olup aşağıdaki yöntem uygulanır.

(ii) $\int \frac{P(x)}{q(x)} dx$ integralinde $n < m$ olmak üzere $q(x)$ -in durumuna göre basit kesirler ayırma yöntemi uygulanır.

(1) $q(x)$ polinomunun birbirinden farklı m tane kökü olsun.

Bu kökler $c_1, c_2, \dots, c_m$ olmak üzere

$q(x) = (x-c_1) \cdot (x-c_2) \cdot \dots \cdot (x-c_m)$ şeklinde yazılabilir.

O zaman

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{P(x)}{(x-c_1) \cdot \dots \cdot (x-c_m)} = \frac{A_1}{x-c_1} + \frac{A_2}{x-c_2} + \frac{A_3}{x-c_3} + \dots + \frac{A_m}{x-c_m}$$

şeklinde yazılır ve paydalar eşittirerek $A_1, A_2, \dots, A_m$ sayıları bulunur.

ÖR: $I = \int \frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = ?$

Payın derecesi paydadan büyük olduğundan önce polinom bölme yapılır.

$$\frac{x^4 - x^3 - 3x^2 - 2x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = x - 2 + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} \text{ olup}$$

$$I = \int \left(x - 2 + \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} \right) dx = \frac{x^2}{2} - 2x + \underbrace{\int \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx}_{I_1}$$

I_1 - integrali için basit kesirler ayrırma I_1

uygularsak $\frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{C}{x-1} \Rightarrow$

$$x^2 - 6x + 2 = A(x+2)(x-1) + B \cdot x \cdot (x-1) + C(x+2) \cdot x \Rightarrow \begin{aligned} A &= -1 \\ B &= 3 \\ C &= -1 \end{aligned}$$

olup

$$I_1 = \int \frac{x^2 - 6x + 2}{x^3 + x^2 - 2x} dx = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{3}{x+2} + \frac{-1}{x-1} \right) dx$$

$$= \int \frac{-1}{x} dx + \int \frac{3}{x+2} dx + \int \frac{-1}{x-1} dx = -\ln|x| + 3\ln|x+2| - \ln|x-1|$$

dir. Sonuç olarak

$$I = \frac{x^2}{2} - 2x + 3\ln|x+2| - \ln|x| - \ln|x-1| + C$$

(2) $q(x) = (x-a)^m$ şeklinde m katlı kökü olsun. O zaman

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x)}{(x-a)^m} = \frac{A_1}{x-a} + \frac{A_2}{(x-a)^2} + \frac{A_3}{(x-a)^3} + \dots + \frac{A_m}{(x-a)^m}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır.

ÖR: $J = \int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} dx = ?$

$$\frac{x^3+1}{(x-1)^4} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{(x-1)^2} + \frac{C}{(x-1)^3} + \frac{D}{(x-1)^4} \Rightarrow \text{payda eşitleirse}$$

$$x^3+1 = A(x-1)^3 + B(x-1)^2 + C(x-1) + D \Rightarrow \begin{matrix} A=1, B=3 \\ C=3, D=2 \end{matrix}$$

bulunur. O zaman

$$J = \int \frac{x^3+1}{(x-1)^4} dx = \int \frac{1}{x-1} dx + \int \frac{3}{(x-1)^2} dx + \int \frac{3}{(x-1)^3} dx + \int \frac{2}{(x-1)^4} dx$$

İle $x-1=u$ değ. değişimi yapılırsa $dx=du$ olup

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{1}{u} du + \int \frac{3}{u^2} du + \int \frac{3}{u^3} du + \int \frac{2}{u^4} du \\ &= \ln|u| - \frac{3}{u} - \frac{3}{2u^2} - \frac{2}{3u^3} + C = \ln|x-1| - \frac{3}{x-1} - \frac{3}{2(x-1)^2} - \frac{2}{3(x-1)^3} + C. \end{aligned}$$

ÖR: $M = \int \frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} dx = ?$

$q(x) = x^3 + 2x^2 + x = x(x+1)^2$ olup $\frac{5x^2 + 20x + 6}{x^3 + 2x^2 + x} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+1} + \frac{C}{(x+1)^2}$
 eşitliğinde payda eşitlenirse

$$5x^2 + 20x + 6 = A(x+1)^2 + B \cdot x \cdot (x+1) + C \cdot x \Rightarrow \begin{matrix} A=6 \\ B=-1, C=9 \end{matrix}$$

olur. O zaman

$$M = \int \frac{6}{x} dx + \int \frac{-1}{x+1} dx + \int \frac{9}{(x+1)^2} dx$$

$$= 6 \ln|x| - \ln|x+1| - \frac{9}{x+1} + C \text{ olur.}$$

ÖR: $J = \int \frac{x+2}{x^2(x+1)} dx = ?$ $\frac{x+2}{x^2(x+1)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2} + \frac{C}{x+1} \Rightarrow$

$A=-1, B=2, C=-1$ olup

$$J = \int \left(\frac{-1}{x} + \frac{2}{x^2} + \frac{-1}{x+1} \right) dx = -\ln|x| - \frac{2}{x} - \ln|x+1| + C$$

olur.

(3) $q(x)$ polinomu birbirinden farklı çarpanlarına ayırlamayan ikinci dereceden polinomların çarpımı şeklinde yazılırsa yani $q(x) = (ax^2+bx+c)(dx^2+ex+f) \dots (rx^2+sx+z)$ olursa

$$\frac{P(x)}{q(x)} = \frac{Ax+B}{ax^2+bx+c} + \frac{Dx+E}{dx^2+ex+f} + \dots + \frac{Rx+S}{rx^2+sx+z}$$

şeklinde basit kesirlere ayrılır.

ÖR: $S = \int \frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} dx = ?$

$$x^4+3x^2+2 = (x^2+2)(x^2+1) \text{ old. dan}$$

$$\frac{x^3+x^2+x+2}{x^4+3x^2+2} = \frac{Ax+B}{x^2+1} + \frac{Cx+D}{x^2+2} \Rightarrow$$

$$x^3+x^2+x+2 = (Ax+B)(x^2+2) + (Cx+D)(x^2+1) \Rightarrow$$

$$A=0, B=1, C=1, D=0 \text{ olup}$$

$$S = \int \frac{x^3 + x^2 + x + 2}{x^4 + 3x^2 + 2} dx = \int \left(\frac{1}{1+x^2} + \frac{x}{x^2+2} \right) dx$$

$$= \arctan x + \frac{1}{2} \ln |x^2+2| + c \text{ olur.}$$

(4) $q(x)$ polinomu çarpanlarına ayılamayan n üncü dereceden bir polinomun tam kuvvetleri şeklinde ise yani

$q(x) = (ax^2+bx+c)^k$ şeklindeyse

$$\frac{p(x)}{q(x)} = \frac{A_1x+B_1}{ax^2+bx+c} + \frac{A_2x+B_2}{(ax^2+bx+c)^2} + \frac{A_3x+B_3}{(ax^2+bx+c)^3} + \dots + \frac{A_kx+B_k}{(ax^2+bx+c)^k}$$

basit kesirlere ayrılır.

ÖR: $I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2+2)^3} dx = ?$

Payın derecesi paydadın küçük olduğundan bölme işlemi yapılmadan basit kesirlere ayırma uygulanırsa;

$$\frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} = \frac{Ax + B}{x^2 + 2} + \frac{Cx + D}{(x^2 + 2)^2} + \frac{Ex + F}{(x^2 + 2)^3} \Rightarrow$$

$A=1, B=-1, C=0, D=0, E=4, F=0$ olup

$$I = \int \frac{x^5 - x^4 + 4x^3 - 4x^2 + 8x - 4}{(x^2 + 2)^3} dx = \int \left[\frac{x-1}{x^2+2} + \frac{4x}{(x^2+2)^3} \right] dx$$

$$= \int \left(\frac{x}{x^2+2} - \frac{1}{x^2+2} + \frac{4x}{(x^2+2)^3} \right) dx =$$

$$= \frac{1}{2} \ln|x^2+2| - \frac{\sqrt{2}}{2} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} - \frac{1}{(x^2+2)^2} + C \text{ olur.}$$

NOT: Rasyonel olmayan fonksiyonlar uygun değişken değişimi yapılarak rasyonel hale getirebilir.

ÖR: $S = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx$ integrali için $x+1=u^2$ alınırsa
 $dx=2u \cdot du$ ve $x=u^2-1$ olup

$$S = \int \frac{1}{x\sqrt{x+1}} dx = \int \frac{1}{(u^2-1) \cdot u} \cdot 2u \cdot du = \int \frac{2}{u^2-1} du$$

$$\frac{2}{u^2-1} = \frac{A}{u-1} + \frac{B}{u+1} \Rightarrow A=1, B=-1 \text{ için}$$

$$\begin{aligned} S &= \int \frac{2}{u^2-1} du = \int \left(\frac{1}{u-1} + \frac{-1}{u+1} \right) du = \ln|u-1| - \ln|u+1| \\ &= \ln \left| \frac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt{x+1}+1} \right| + C \end{aligned}$$

ÖR: $J = \int \frac{x+1}{x-x^{4/3}} dx = ?$ Kökün derecesi en büyük 3 olduğundan $x=u^3$ alınırsa

$$\begin{aligned} J &= \int \frac{u^3+1}{u^3-u^4} \cdot 3u^2 \cdot du = \int \frac{3u^3+3}{u-u^2} \cdot du = \int \left(-3u-3 + \frac{3u+3}{u-u^2} \right) du \\ &= -\frac{3u^2}{2} - 3u + 3 \int \frac{u+1}{u-u^2} du = -\frac{3u^2}{2} - 3u + 3 \int \frac{u+1}{u(1-u)} du \end{aligned}$$

$$J = \frac{-3u^2}{2} - 3u + 3 \int \left(\frac{1}{u} + \frac{2}{1-u} \right) du$$

$$= \frac{-3u^2}{2} - 3u + 3 \ln|u| - 2 \ln|1-u|$$

$$= \frac{-3}{2} x^{2/3} - 3x^{1/3} + 3 \ln|x^{1/3}| - 2 \ln|1-x^{1/3}| + c$$

ÖR: $I = \int \frac{\cos x}{1+\cos x} dx$ integralinde $R(\sin x, \cos x) = \frac{\cos x}{1+\cos x}$

olup $R(\sin x, -\cos x) \neq -R(\sin x, \cos x)$;

$R(-\sin x, -\cos x) \neq R(\sin x, \cos x)$ old. dan $\tan \frac{x}{2} = t$

dönüşümü uygulanmalıdır. Buna göre

$$I = \int \frac{1-t^2}{1+\frac{1-t^2}{1+t^2}} \cdot \frac{2dt}{1+t^2} = \int \frac{1-t^2}{1+t^2} \cdot \frac{1+t^2}{2} \cdot \frac{2 \cdot dt}{1+t^2} =$$

$$= \int \left(-1 + \frac{2}{1+t^2} \right) dt = -t + 2 \arctan t = -\tan \frac{x}{2} + 2x + c \text{ due.}$$

ÖR: $J = \int \frac{1}{\sin x + \tan x} dx = ?$ $R(\sin x, \cos x) = \frac{1}{\sin x + \tan x}$ olup

$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x)$ olduğundan $\cos x = u$ dönüşümü yapılmalıdır.

$$J = \int \frac{1}{\sin x + \tan x} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x (\cos x + 1)} dx = \int \frac{\cos x \cdot \sin x}{\sin^2 x (\cos x + 1)} dx$$

$$= \int \frac{-u \cdot du}{(1-u^2)(1+u)} = \int \left(\frac{A}{1-u} + \frac{B}{1+u} + \frac{C}{(1+u)^2} \right) du$$

$$-u = A(1+u)^2 + B(1-u^2) + C(1-u) \quad A = -\frac{1}{4}, B=1, C=-1$$

olup

$$J = \int \left(\frac{-1/4}{1-u} + \frac{1}{1+u} + \frac{-1}{(1+u)^2} \right) du = \frac{1}{4} \ln|1-u| + \ln|1+u| + \frac{1}{1+u}$$

$$= \frac{1}{4} \ln|1-\cos x| + \ln|1+\cos x| + \frac{1}{1+\cos x} + c \text{ olur.}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



20

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERİLMİZ

Ders 10