Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Taylor formülü

TANIM. $p \geq 1$ bir tamsayı, $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme ve $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f nın V üzerindeki $(p-1)$. nci mertebeden kısmi türevleri varsa ve f fonksiyonu a noktasında dif.bilirse, o zaman

$$D^{(p)} f(a;h) = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_p=1}^{n} \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_p}}(a)\, h_{i_1} \cdots h_{i_p}$$

ifadesine, f nın a ve $h=(h_1, \ldots, h_n)$ noktalarındaki p. nci mertebeden 'tam diferansiyeli' denir. $p=1$ için

$$D^{(1)} f(a;h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a)\, h_j = \nabla f(a) \cdot h = Df(a)(h)$$

ve $p>1$ durumunda,

$$D^{(p)} f(a;h) = D^{(1)}\left(D^{(p-1)} f\right)(a;h) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{p-1}=1}^{n} \frac{\partial^{p-1} f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_{p-1}}}(a)\, h_{i_1} \cdots h_{i_{p-1}}\right) h_j$$

biçiminde elde edilebileceklerini hemen görebiliriz.

ÖRNEK. $V \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme, $(a,b) \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ fonksiyonu V üzerinde C^2-sınıfından olsun. O zaman tanıma göre

$$D^{(2)} f((a,b);(h,k)) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + hk \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

olur. f fonksiyonu C^2-sınıfından olduğundan $f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$ olup, buna göre

$$D^{(2)} f((a,b);(h,k)) = h^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) + 2hk \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) + k^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b)$$

elde edilir.

Örneğin $f(x,y) = (xy)^2$ olmak üzere $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$D^{(2)} f((x,y);(h,k)) = 2y^2h^2 + 8xyhk + 2x^2k^2$$

olur.

23. Teorem (Taylor Formülü). $p \in \mathbb{N}$, $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $x \in V$, $a \in V$ ve $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f nin $(p-1)$.nci mertebeden kısmi türevleri V üzerinde var ve dif. bilirse, yine $L(x;a) \subset V$ ise, o zaman $h = x - a$ olmak üzere

$$f(x) = f(a) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} D^{(k)} f(a;h) + \frac{1}{p!} D^{(p)} f(c,h)$$

olacak şekilde bir $c \in L(x;a)$ vardır.

İspat. $h=x-a$ olsun. V nin açık ve $L(x;a)\subset V$ olmasından her $t\in(-\delta;1+\delta)$ için $a+th\in V$ olacak şekilde bir $\delta>0$ seçilebilir.

$$F:(-\delta,1+\delta)\to\mathbb{R},\ F(t)=f(a+th)$$

biçiminde tanımlanan F fonksiyonu $(-\delta,1+\delta)$ üzerinde dif. bilirdir, çünkü $g(t)=a+th$ ile tanımlı $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$ fonk.u her $t\in(-\delta,1+\delta)$ noktasında, hipoteze göre $f:V\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da $g(t)$ noktasında dif. bilirdir. O halde Zincir kuralına göre

$$F'(t)=Df(a+th)(h)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(a+th)\,h_k$$

olur, ardışık türevler alınarak, her $j=1,2,\dots,p$ için

$$F^{(j)}(t)=\sum_{i_1=1}^{n}\dots\sum_{i_j=1}^{n}\frac{\partial^j f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_j}}(a+th)\,h_{i_1}\dots h_{i_j}$$

yazılır.

Böylece F nin $[0,1]\subset(-\delta,1+\delta)$ olmak üzere $(-\delta,1+\delta)$ aralığı üzerinde p.nci mertebeden türevi var ve $j=1,\dots,p-1$; $t\in(-\delta,1+\delta)$ için

$$F^{(j)}(0)=D^{(j)}f(a;h) \text{ ve } F^{(p)}(t)=D^{(p)}f(a+th;h)$$

bulunur. Eğer tek değişkenli fonksiyonlar için Taylor formülü kullanılırsa, bir $t\in(0,1)$ için

$$f(x)-f(a)=F(1)-F(0)=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}F^{(j)}(0)+\frac{1}{p!}F^{(p)}(t)$$

$$=\sum_{j=1}^{p-1}\frac{1}{j!}D^{(j)}f(a;h)+\frac{1}{p!}D^{(p)}f(a+th;h)$$

olur ve $c=a+th$ olmak üzere istenen elde edilir.

ÖRNEK. $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $f(x,y)=x^2y-y^3$ fonksiyonunun $a=(1,0)$ noktasındaki Taylor formülünü bulunuz.

Çözüm. $f(1,0)=0$, $f_x(x,y)=2xy \Rightarrow f_x(1,0)=0$, $f_y(x,y)=x^2-3y^2$ $\Rightarrow f_y(1,0)=1$, $f_{xx}(x,y)=2y \Rightarrow f_{xx}(1,0)=0$, $f_{xy}(x,y)=2x \Rightarrow f_{xy}(1,0)=2$, $f_{yy}(x,y)=-6y \Rightarrow f_{yy}(1,0)=0$, $f_{xxx}(x,y)=0 \Rightarrow f_{xxx}(1,0)=0$, $f_{xxy}(x,y)=2$, $\Rightarrow f_{xxy}(1,0)=2$, $f_{xyy}(x,y)=0 \Rightarrow f_{xyy}(1,0)=0$, $f_{yyy}(x,y)=-6 \Rightarrow f_{yyy}(1,0)=-6$ olup, f'nin 4.üncü ve daha yüksek mertebeden kısmi türevleri 0 olur. O zaman $\forall(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için

(85)

$$f(x,y) = f(1,0) + \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k!} D^{(k)} f\left((1,0); (x,y)-(1,0)\right) + \frac{1}{p!} D^{(p)} f(c,h)$$

ve $c \in L((x,y);(1,0))$ olur. Burada f nin her mertebeden kısmi türevleri var ve dif. bilir olduğundan p herhangi bir doğal sayı olabilir.

$$D^{(1)} f((1,0);(x-1,y)) = Df(1,0)(x-1,y) = \nabla f(1,0).(x-1,y)$$

$$= (f_x(1,0), f_y(1,0)).(x-1,y)$$

$$= (0,1).(x-1,y) = y$$

$$D^{(2)} f((1,0);(x-1,y)) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(1,0)\, h_i h_j$$

$$= \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial x}(1,0)(x-1)^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(1,0)(x-1).y$$

$$+ \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(1,0)(x-1)y + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial y}(1,0).y^2$$

$$= 0.(x-1)^2 + 2(x-1).y + 2(x-1)y + 0.y^2$$

$$= 4(x-1)y$$

ve benzer şekilde

$$D^{(3)}f((1,0);(x-1,y)) = f_{xxx}(1,0)(x-1)^3 + f_{xxy}(1,0)(x-1)^2 y$$
$$+ f_{xyy}(1,0)(x-1)y^2 + f_{yyy}(1,0).y^3$$
$$+ f_{yyx}(1,0)(x-1)y^2 + f_{yxx}(1,0)(x-1)^2 y$$
$$= 0.(x-1)^3 + 2(x-1)^2 y + 0.(x-1)y^2$$
$$+ (-6).y^3 + 0.(x-1)y^2 + 2(x-1)^2 y$$
$$= 4(x-1)^2 y - 6y^3$$

bulunur. Buna göre

$$f(x,y) = y + \frac{1}{2!}4(x-1)y + \frac{1}{3!}\left[4(x-1)^2 y - 6y^3\right]$$
$$= y + 2(x-1)y + \frac{2}{3}(x-1)^2 y - y^3$$

çıkar.

(87)

ÖRNEK. $f(x,y)=\frac{x}{y}$ fonksiyonun $a=(1,2)$ noktasında $p=3$ mertebeden Taylor formülünü bulunuz.

Çözüm. $f(1,2)=1/2$, $f_x(x,y)=\frac{1}{y} \Rightarrow f_x(1,2)=1/2$,

$f_y(x,y)=-x/y^2 \Rightarrow f_y(1,2)=-1/4$, $f_{xx}(x,y)=0 \Rightarrow f_{xx}(1,2)=0$,

$f_{xy}(x,y)=-1/y^2 \Rightarrow f_{xy}(1,2)=-1/4$, $f_{yy}(x,y)=2x/y^3 \Rightarrow f_{yy}(1,2)=1/4$,

$f_{xxx}(x,y)=0$, $f_{xxy}(x,y)=0$, $f_{xyy}(x,y)=2/y^3$, $f_{yyy}(x,y)=-\frac{6x}{y^4}$

Bu kısmi türevler ve f nin kendisi $\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\,|\,y\neq 0\}$ üzerinde tanımlı ve sureklidir.

$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\,|\,y\neq 0\}$ ve $L((x,y);(1,2))\subset\mathbb{R}^2\setminus\{(x,y)\,|\,y\neq 0\}$

verildiğinde

$$f(x,y)=1/2+\frac{1}{1!}\left[f_x(1,2)(x-1)+f_y(1,2)(y-2)\right]+\frac{1}{2!}\left[f_{xx}(1,2)(x-1)^2+2f_{xy}(1,2)\cdot(x-1)(y-2)+f_{yy}(1,2)\cdot(y-2)^2\right]+\frac{1}{3!}\left[f_{xxx}((1,2)+t(x-1,y-2))\cdot(x-1)^3+\cdots\right]$$

Ters Fonksiyon Teoremi ve Kapalı Fonk. Teoremi:

Bir $(a,b) \subset \mathbb{R}$ açık aralığı üzerinde terslenebilen bir $f:(a,b) \to f((a,b))$ fonksiyonunun bir $x_0 \in (a,b)$ noktasında $f'(x_0)$ türevi var ve $f'(x_0) \neq 0$ ise, $f^{-1}: f((a,b)) \to (a,b)$ ters fonksiyonunun $y_0 = f(x_0)$ noktasında türevi var ve

$$(f^{-1})'(y_0) = 1/f'(x_0)$$

idi. Bu kesimde ters fonksiyon teoremi olarak adlandırılan bu sonuç, aynı boyuttan uzaylar arasındaki $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonları için elde edilecektir. Bir matrisin terslenebilir olması için $\Leftrightarrow$ onun determinantının sıfırdan farklı olmasıdır, bilgisi hatırlanırsa;

$$[Df(a)]^{-1} \text{ matrisi var} \Leftrightarrow \Delta_f(a) \text{ Jacobi determinantı} \neq 0$$

yazabiliriz.

24. Teorem (Ters Fonksiyon Teoremi): $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $f: V \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu V üzerinde sürekli-dif. bilir ve $W := f(V)$ olsun. Eğer bir $a \in V$ için $\Delta_f(a) \neq 0$ ise, o zaman

(1) $a \in V_0$ ve $f(a) \in W_0$,

(2) $f: V_0 \to W_0$ birebir ve örten, dolayısıyla $f^{-1}: W_0 \to V_0$ birebir ve örten,

(3) f^{-1} fonksiyonu W_0 üzerinde sürekli-dif. bilir ve

(4) Her $y = f(x) \in W_0$ için

$$D(f^{-1})(y) = [Df(x)]^{-1}$$

olacak şekilde $V_0 \subset V$ ve $W_0 \subset W$ açık kümeleri vardır.

UYARI. (a) Son teoremin hipotezindeki $\Delta_f(a) \neq 0$ olması koşulu zayıflatılamaz.

Eğer $f: B(a, r) \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu a noktasında dif.

birirse, f^{-1} ters fonksiyonu varsa ve $f(a)$ noktasında dif. bilir ise, o zaman $\Delta_f(a) \neq 0$ olmalıdır.

Gerçekten verilen koşullar altında $\Delta_f(a) = 0$ olsaydı, Zincir kuralı gereğince

$$I_n = D(f^{-1} \circ f)(a) = D(f^{-1})(f(a)) Df(a)$$

olurdu, ama determinanta geçildiğinde

$$1 = \Delta_{f^{-1}}(f(a)) \cdot \Delta_f(a) = 0$$

çelişkisine ulaşılırdı.

(b) Son teoremin hipotezindeki f fonksiyonunun V üzerinde sürekli-dif. bilir olması koşulu zayıflatılamaz. Çünkü

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \; f(x) = \begin{cases} x + 2x^2 \sin(1/x), & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

fonksiyonu $(-1,1)$ açık aralığı üzerinde (sürekli) dif. bilirdir ve $f'(0) = 1 \neq 0$ olur, ama her $k \in \mathbb{N}$ için

$$f\left(\frac{2}{(4k-1)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k+1)\pi}\right) < f\left(\frac{2}{(4k-3)\pi}\right)$$

olduğundan f fonksiyonu 0 noktasını içeren hiçbir V_0 açık kümesi üzerinde birebir olamaz.

(c) Son teoremde V_0 kümesi genelde V nin bir öz alt kümesidir.

$V=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ ve her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $f(x,y)=(x^2-y^2, xy)$ ise, $(x,y)\in V$ olduğunda

$$\Delta_f(x,y)=\begin{vmatrix}2x & -2y\\ y & x\end{vmatrix}=2(x^2+y^2)\neq 0$$

olur, ama her $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ için $f(x,-y)=f(-x,y)$ olduğundan f birebir değildir.

$=x\cos y$ $=x\sin y$

ÖRNEK. $f=(f_1,f_2):\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $f(x,y)=(f_1(x,y), f_2(x,y))$ fonksiyonunun jakobiyenini bulunuz ve tersinin olduğu açıkları belirleyiniz.

Çözüm. $f_1, f_2\in C^1(\mathbb{R}^2)$ olduğu aşikardır. $f=(f_1,f_2)$ nin (x,y) noktası için jakobiyeni

$$\Delta_f(x,y)=\begin{vmatrix}\partial f_1/\partial x & \partial f_1/\partial y\\ \partial f_2/\partial x & \partial f_2/\partial y\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\cos y & -x\sin y\\ \sin y & x\cos y\end{vmatrix}=x$$

olur. O zaman $x_0\neq 0$ olmak üzere (x_0,y_0) noktası için $(x_0,y_0)\in V_0$, $f(x_0,y_0)\in W_0$ ve $f:V_0\to W_0$ terslenebilir olacak şekilde V_0, W_0 açıkları vardır.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR