Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ ve $\Phi, \psi, \sigma: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dif. bilir fonk.lar olsunlar. Yine

$$w = f(x, y, z),\ x = \Phi(t),\ y = \psi(t) \text{ ve } z = \sigma(t)$$

olsun. O zaman

$$w = h(t) = f(\Phi(t), \psi(t), \sigma(t)) \text{ ve } g = (\Phi, \psi, \sigma)$$

olmak üzere $h = f \circ g$ fonk.unu zincir kuralını uygulayalım:

$$Df = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \ \frac{\partial w}{\partial y}\ \ \frac{\partial w}{\partial z}\right],\quad Dg = \left[\frac{dx}{dt}\ \ \frac{dy}{dt}\ \ \frac{dz}{dt}\right],\quad Dh = \left[\frac{dw}{dt}\right]$$

olup, zincir kuralına göre

$$Dh = Df(g)Dg \Rightarrow \left[\frac{dw}{dt}\right] = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\ \ \frac{\partial w}{\partial y}\ \ \frac{\partial w}{\partial z}\right] \cdot \begin{bmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{bmatrix} = \left[\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{dy}{dt} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right]$$

elde edilir. #

Yönlü Türev ve Dif. bilirlik İlişkisi

21. Teorem. $f: E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonk.u $P \in E$ noktasında dif. bilir ise $\vec{v} = (v_1, \ldots, v_n)$ birim vektörü yönündeki yönlü türevi için

$$D_{\vec{v}} f(P) = \nabla f(P) . \vec{v}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. f fonk.u P noktasında dif. bilir ise zincir kuralı gereğince

$$\frac{d}{dt} f(P + t\vec{v}) = \frac{d}{dt}\left(f(P_1 + tv_1, \ldots, P_n + tv_n)\right)$$

$$= f_{x_1}(P+t\vec{v}) \frac{d(P_1 + tv_1)}{dt} + \cdots + f_{x_n}(P+t\vec{v}) \frac{d(P_n + tv_n)}{dt}$$

$$= f_{x_1}(P+t\vec{v}) v_1 + \cdots + f_{x_n}(P+t\vec{v}) v_n$$

ve

$$D_{\vec{v}} f(P) = \frac{d}{dt} f(P + t\vec{v})\Big|_{t=0} = f_{x_1}(P) v_1 + \cdots + f_{x_n}(P) v_n$$

$$= \left(f_{x_1}(P), \ldots, f_{x_n}(P)\right) . (v_1, \ldots, v_n) = \nabla f(P) . \vec{v}$$

olur.

Son örneği bu teoreme göre değerlendirelim:

$$f(x,y) = x^2 y \ , \ p = (1,2) \ , \ \vec{v} = (-3/5 \ , 4/5).$$

$$f_x(x,y) = 2xy \ , \ f_x(1,2) = 2.(1)(2) = 4,$$

$$f_y(x,y) = x^2 \ , \ f_y(1,2) = (1)^2 = 1 \ ,$$

$$\nabla f(1,2) = (f_x(1,2), f_y(1,2)) = (4,1) .$$

$$D_{\vec{v}} f(1,2) = \nabla f(1,2) . \vec{v} = (4,1) . (-3/5 \ , 4/5) = -12/5 + 4/5 = -8/5$$

NOT. Son teorem bir noktada dif. bilir fonk.un, o noktada her yöndeki yönlü türevinin varlığını gösterir. Ama bunun tersi doğru değildir, yani her yöndeki yönlü türeve sahip olan bir fonk. o noktada dif. bilir olmayabilir.

ÖRNEK. $f(x,y) = \begin{cases} (x^2y)/(x^4+y^2) \ , & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \ , & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonk.un

(0,0) noktasındaki $\vec{u} = (u_1, u_2)$ birim vektörü yönündeki yönlü türevinin var olduğunu, ama f nin $(0,0)$ noktasında dif. bilir olmadığını gösteriniz.

Çözüm. $D_{\vec{u}} f((0,0)) = \lim_{t\to 0} \dfrac{f(0+tu_1, 0+tu_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \dfrac{(tu_1)^2(tu_2)}{(tu_1)^6+(tu_2)^3}$

$$= \lim_{t\to 0} \frac{t^3u_1^2 . u_2}{t^6u_1^6+t^3u_2^3} = \lim_{t\to 0} \frac{u_1^2u_2}{t^3u_1+u_2^2} = \begin{cases} 0, & u_2=0 \\ u_1^2/u_2^2, & u_2\neq 0 \end{cases}$$

olur. Ama f fonk.un $(0,0)$ da dif. bilir değildir. Çünkü f fonk.un $(0,0)$ da sürekli değildir, gerçekten $y=kx^4$ yönünden $(0,0)$ noktasına yaklaşılırsa

$$\lim_{\substack{(x,y)\to(0,0)\\ y=kx^4}} \frac{x^2y}{x^6+y^3} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2kx^4}{x^6+k^3x^{12}} = \lim_{x\to 0} \frac{k}{1+k^3x^6} = k$$

olup, limit k ye bağlıdır, yani limit yoktur.

Ayrıca f fonk.un $(0,0)$ da dif. bilir olmadığından $D_{\vec{v}} f(0,0) = \nabla f(0,0) . \vec{v}$ formülü geçerli olamayabileceğini de gösterir. Gerçekten

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0+t,0)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t)-f(0,0)}{t}=\lim_{t\to 0}\frac{0-0}{t}=0$$

olduğundan $\nabla f(0,0)=(0,0)$ dır. Çünkü $\vec{u}=(1/\sqrt{2},1/\sqrt{2})$ vektörü için $D_{\vec{u}}f(0,0)=\frac{(1/\sqrt{2})^2}{(1/\sqrt{2})^2}=1$ ve dolayısıyla

$$0=\nabla f(0,0)\cdot\vec{u}\neq D_{\vec{u}}f(0,0)=1$$

bulunur.

NOT. Bir noktada her yönden yönlü türevi olan fonksiyonun bu noktadaki kısmi türevleri de vardır. Ama kısmi türevlerin varlığı her yönde yönlü türevin varlığını garanti edemez.

Yönlü Türevin Geometrik Anlamı

$D_{\vec{v}} f(P_0)$ yönlü türevi f fonk.nun $\vec{v}$ birim vektörü yönündeki değişimini belirtir.

$$\nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \|\vec{v}\| \cdot \cos\theta = \|\nabla f(P_0)\| \cdot \cos\theta$$

olduğuna göre $D_{\vec{v}} f(P_0)$ yönlü türevinin en büyük olması için, yani f nin en hızlı artması için

$$\vec{u} = \frac{\nabla f(P_0)}{\|\nabla f(P_0)\|},$$

yani $\theta = 0$ olmasıdır. Buna göre bir fonk.un maksimum değişimi gradyen vektörü yönündedir.

Değişimin sıfır olduğu yön ise

$$\vec{v} = (f_y(P_0), -f_x(P_0)) / \|\nabla f(P_0)\|$$

yönüdür. Çünkü

$$\nabla f(P_0) \cdot \vec{v} = (f_x(P_0), f_y(P_0)) \cdot (f_y(P_0)/\nabla f(P_0), -f_x(P_0)/\|\nabla f(P_0)\|) = 0$$

dır.

Değişimin minimum olduğu yön (f nin en hızlı azaldığı yön) ise

$$u = -\nabla f(P_0) / \|\nabla f(P_0)\|.$$

Çok Değişkenli Fonksiyonlar için Ortalama Değer Teoremi ve Taylor Formülü

22. Teorem (Ortalama Değer Teoremi). $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme ve $f: V \to \mathbb{R}^m$ ise V üzerinde bir dif. bilir fonksiyon olsun. Yine $x, a \in V$ ve bu iki noktayı birleştiren doğru $L(x,a) = \{a + t(x-a) \mid t \in [0,1]\}$ olmak üzere $L(x,a) \subset V$ kabul edilsin. O zaman her $u \in \mathbb{R}^m$ için

$$u \cdot (f(x) - f(a)) = u \cdot (Df(c)(x-a))$$

olacak şekilde bir $c \in L(x,a)$ noktası vardır.

İspat. Bir $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ fonksiyonu

$$g(t) = a + t(x-a)$$

biçiminde tanımlansın.

Aşikar olarak g fonksiyonu $\mathbb{R}$ üzerinde dif. bilirdir, çünkü $g(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t)) = (a_1 + t(x_1 - a_1), \ldots, a_n + t(x_n - a_n))$ olmak üzere $\frac{dg_i}{dt} = x_i - a_i$ türevleri var ve süreklidir.

Dolayısıyla her $t \in \mathbb{R}$ için

$$Dg(t) = \left(\frac{dg_1}{dt}, \ldots, \frac{dg_n}{dt}\right) = (x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n) = x - a$$

yazılır. $L(x,a) \subset V$ ve V açık olduğundan, her $t \in (-\delta, 1+\delta)$ için $g(t) \in V$ olacak şekilde $\delta > 0$ vardır. Öte yandan her $t \in (-\delta, 1+\delta)$ için zincir kuralına göre

$$D(f \circ g)(t) = Df(g(t))(x-a) \quad g'(t)$$

olur. $u \in \mathbb{R}^m$ sabitlendiğinde, bir $F: (-\delta, 1+\delta) \to \mathbb{R}$ fonk.u

$$F(t) = u \cdot (f \circ g)(t)$$

diye tanımlansın.

O zaman F, $(-\delta, 1+\delta)$ üzerinde dif.bilirdir ve her $t \in (-\delta, 1+\delta)$ için

$$F'(t) = u \cdot D(f \circ g)(t) = u \cdot (Df(g(t)))(x-a)$$

olur. Tek değişkenli ve reel değerli fonksiyonlar için ortalama değer teoremi gereğince

$$u \cdot (f(x) - f(a)) = F(1) - F(0) = F'(t_0) = u \cdot (Df(g(t_0))(x-a))$$

olacak şekilde bir $t_0 \in (0,1)$ vardır ve $c = g(t_0)$ alınırsa ispat biter.

1. Sonuç. $V \subset \mathbb{R}^n$ açık ve konveks bir alt küme, $f: V \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu V üzerinde dif. bilir, ve $a \in V$, $a+h \in V$ ise, o zaman

$$f(a+h) - f(a) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_j}(a+th)\, h_j = \nabla f(a+th) \cdot h$$

olacak şekilde bir $t \in (0,1)$ vardır.

İspat. V konveks ve $a \in V$, $a+h \in V$ olduğundan

$$L(a+h; a) \subset V$$

dir. Son teoreme göre

$$u(f(a+h) - f(a)) = u(\nabla f(c) \cdot h)$$

olacak şekilde bir $c \in L(a+h; a)$ noktası vardır. O halde $c = a+th$ olmak üzere $t \in (0,1)$ alınırsa, istenen elde edilir.

2. Sonuç. $V \subset \mathbb{R}^n$ açık ve konveks bir alt küme; $f: V \to \mathbb{R}^m$ bir dif. bilir fonksiyon olsun. O zaman her $x, a \in V$ için

$$\|f(x)-f(a)\| \leq M\|x-a\|$$

olacak şekilde bir M sabiti vardır.

İspat. $x, a \in V$ olsun ve $u = f(x) - f(a)$ alınsın. V konveks olduğundan, $L(x;a) \subset V$ dir. Son teoreme göre

$$\|f(x)-f(a)\|^2 = u \cdot (f(x)-f(a)) = u \cdot (Df(c)(x-a))$$
$$= (f(x)-f(a)) \cdot (Df(c)(x-a))$$

olacak şekilde bir $c \in L(x;a)$ vardır. Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa, bir M sabiti için

$$\|f(x)-f(a)\|^2 \leq \|f(x)-f(a)\| \cdot \|Df(c)(x-a)\|$$
$$\leq \|f(x)-f(a)\| \cdot M \cdot \|x-a\|$$

olur. Bu ispatı tamamlar.

3. Sonuç. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık ve konveks alt küme, $f: V \to \mathbb{R}^m$ de V üzerinde dif. bilir bir fonksiyon olsun. $0_{m \times n}$ $m\times n$ – tipinden sıfır matris olmak üzere eğer her $c \in V$ için $Df(c) = 0_{m \times n}$ ise, o zaman f fonksiyonu V üzerinde bir sabit fonk. dur.

İspat. Sabit bir $a \in V$ noktası verilsin. Herhangi bir $x \in V$ için $L(x; a) \subset V$ olup, $u = f(x) - f(a)$ olmak üzere son teoreme göre

$$\|f(x) - f(a)\|^2 = (f(x) - f(a)).(f(x) - f(a)) = u(f(x) - f(a)) = u.(Df(c)(x-a))$$

olacak şekilde bir $c \in L(x, a)$ vardır. Hipotez gereğince

$$\|f(x) - f(a)\|^2 = 0 \Rightarrow f(x) = f(a)$$

olur. #

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR