Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

NOT. Son örnekteki fonk. $\mathbb{R}^2$ üzerinde dif. bilir olmasına karşın, C^1-sınıfından değildir.

Eğer $f: E\subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonk.u E açık kümesi üzerinde ya da bir a noktasında hem C^1-sınıfından hemde dif. bilir ; olduğunda 'sürekli-dif. bilir' olduğu söylenir.

O halde son örnekte f fonk.u $\mathbb{R}^2$ üzerinde sürekli-dif. bilir değildir.

17. Teorem. $E\subset \mathbb{R}^n$ bir açık altküme, $a\in E$ ve $f: E\to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Eğer f nin a noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri varsa, o zaman f fonk.u a noktasında dif. bilirdir $\Leftrightarrow$ $\lim\limits_{h\to 0}\varphi(h)=0$ ve bir $r>0$ için $\|h\|<r$ olan her h vektörü için

$$f(a+h)-f(a)=Df(a)(h)+\|h\|\varphi(h) \quad \ldots (*)$$

olacak şekilde bir $\varphi: \mathbb{R}^n\to \mathbb{R}^m$ fonk.u vardır.

İspat. E nin açık olmasını gözönüne alarak $B(a,r)\subset E$ olacak şekilde bir $r>0$ seçilsin. Bir

$\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $\varphi(h) = \begin{cases} (f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)) / \|h\|, & 0 < \|h\| < r \\ 0, & r \leq \|h\| \end{cases}$

fonku tanımlansın. (*) eşitliğinin $h=0$ için gerçekleştiği açıktır. φ nin tanımına göre $0<\|h\|<r$ olmak üzere her h vektörü için (*) gerçekleşir. Diferansiyellenebilme tanımına göre

$$\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$$

yazılır. O halde istenen fonk. bu $\varphi: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dir.

Tersine (*) eşitliği $\|h\|<r$ olan tüm h vektörleri için gerçekleşirse, $\lim_{h\to 0} \varphi(h) = 0$ olacağından, f fonku a noktasında dif. bilirdir.

18 Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in E$, $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ iki fonk. olsun. Yine f ve g fonkları a noktasında dif. bilir olsun. O zaman

(1) $f+g$ fonku a noktasında dif. bilir ve

$$D(f+g)(a) = Df(a) + Dg(a),$$

(2) αf fonk.u a noktasında dif.bilir ve

$$D(\alpha f)(a)=\alpha Df(a),$$

(3) $m=1$ durumunda $f.g$ fonk.u a noktasında dif.bilir ve

$$D(f.g)(a)=g(a)Df(a)+f(a)Dg(a)$$

olur.

İspat. Sadece (3) özelliğini ispatlayacağız, diğerleri dif.bilme tanımının kolay sonuçlarıdır.

f ve g fonk.ları a noktasında dif.bilir olduğundan

$$\lim_{h\to 0}\varphi_1(h)=0, \quad \lim_{h\to 0}\varphi_2(h)=0$$

ve

$$f(a+h)-f(a)=Df(a)(h)+\|h\|\cdot\varphi_1(h),$$
$$g(a+h)-g(a)=Dg(a)(h)+\|h\|\cdot\varphi_2(h)$$

olacak şekilde $\varphi_1:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ ve $\varphi_2:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ fonk.ları vardır.

O zaman

$$
\begin{aligned}
&(f.g)(a+h)-(f.g)(a)-g(a)Df(a)(h)-f(a)Dg(a)(h)\\
&\quad = f(a+h).g(a+h)-f(a).g(a)-g(a)Df(a)(h)-f(a)Dg(a)(h)\\
&\quad = f(a+h).g(a+h)-f(a).g(a+h)+f(a)g(a+h)-Df(a)(h).g(a+h)\\
&\qquad +Df(a)(h).g(a+h)-f(a)g(a)-g(a)Df(a)(h)-f(a)Dg(a)(h)\\
&\quad = [f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)]g(a+h)\\
&\qquad +Df(a)(h).[g(a+h)-g(a)]\\
&\qquad +f(a).[g(a+h)-g(a)-Dg(a)(h)]\\
&\quad = \|h\|.\varphi_1(h).g(a+h)+Df(a)(h).[g(a+h)-g(a)]\\
&\qquad +f(a).\|h\|.\varphi_2(h)\\
&\quad = \|h\|[\varphi_1(h).g(a+h)+f(a)\varphi_2(h)]+Df(a)(h)[g(a+h)-g(a)]
\end{aligned}
$$

olup, buna göre

$$\frac{(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)-g(a)Df(a)(h)-f(a)\cdot Dg(a)(h)}{\|h\|} \quad \sim (**)$$

$$=\varphi_1(h)\cdot g(a+h)+f(a)\varphi_2(h)+\frac{Df(a)(h)}{\|h\|}[g(a+h)-g(a)]$$

bulunur.

$\lim_{h\to 0}\varphi_1(h)=\lim_{h\to 0}\varphi_2(h)=0$ ve f ile g fonk.larının a noktasında sürekli olmasından

$\lim_{h\to 0}[\varphi_1(h)\cdot g(a+h)]=\lim_{h\to 0} f(a)\varphi_2(h)=\lim_{h\to 0}[g(a+h)-g(a)]=0$

olur. Ayrıca $Df(a):\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü her $h\in\mathbb{R}^n$ için

$$\|Df(a)(h)\|\leq M\cdot\|h\|$$

olacak şekilde bir $M>0$ vardır, böylece $h\neq 0$ için

$$\|Df(a)(h)\|/\|h\|\leq M$$

elde edilir.

Söylenenlere göre $h\to 0$ iken $(**)$ ifadesinin sağ yanı 0 a yaklaşır, o halde

$$\lim_{h\to 0}[(f\cdot g)(a+h)-(f\cdot g)(a)-g(a)Df(a)(h)-f(a)Dg(a)(h)]/\|h\|=0$$

sonucuna ulaşılır. Buna göre

$$D(f.g)(a) = g(a)Df(a) + f(a)Dg(a)$$

olur. #

Bu aşamada tek değişkenli fonk.lar için zincir kuralını çok değişkenli fonk.lara genişleteceğiz.

20. Teorem (Zincir Kuralı). $E \subset \mathbb{R}^n$ ve $F \subset \mathbb{R}^m$ açık alt kümeler; $f: F \to \mathbb{R}^p$, $g: E \to \mathbb{R}^m$ iki fonk.; $a \in E$ ve $g(a) \in F$ olsun.

Eğer g ve f fonk.ları sırasıyla a ve $g(a)$ noktalarında dif.bilirse, o zaman $f \circ g : E \to \mathbb{R}^p$ bileşke fonk.u a noktasında dif.bilirdir ve

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)).Dg(a) \quad \cdots (1)$$

olur.

İspat. $\lim\limits_{h \to 0} [(f \circ g)(a+h) - (f \circ g)(a) - Df(g(a))Dg(a)(h)] / \|h\|$

olduğu gösterilmelidir.

g ve f fonk.larının sırasıyla a ve $g(a)$ noktalarında dif. bilir olması gereğince $\lim_{h\to 0} \varphi_1(h)=0$, $\lim_{h\to 0} \varphi_2(h)=0$ ve yeterince küçük h ile k değerleri için

$$g(a+h)-g(a)=Dg(a)(h)+\|h\|\varphi_1(h) \quad -(2)$$

$$f(g(a)+k)-f(g(a))=Df(g(a))(k)+\|k\|\cdot\varphi_2(k) \quad -(3)$$

olacak şekilde

$$\varphi_1: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \text{ ve } \varphi_2: \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^p$$

fonk.ları vardır.

$h\neq 0$ sabitlenip, $k=g(a+h)-g(a)$ alınsın. (2) ve (3) eşitlikleri gereğince

$$f(g(a+h))-f(g(a))=f(g(a)+k)-f(g(a))$$
$$=Df(g(a))(k)+\|k\|\varphi_2(k)$$

(67)

$$= Df(g(a))\big(Dg(a)(h) + \|h\|\varphi_1(h)\big) + \big(\|k\|\varphi_2(k)\big)$$

$$= Df(g(a))Dg(a)(h) + \|h\| . Df(g(a))\varphi_1(h) + \|k\|\varphi_2(k)$$

yazılır. Buradan

$$\frac{f(g(a+h)) - f(g(a)) - Df(g(a))Dg(a)(h)}{\|h\|} = Df(g(a)\varphi_1(h) + \frac{\|k\|}{\|h\|}\varphi_2(k)$$

yazılır. $Df(g(a))$ tam türevi lineer ve $\lim\limits_{h\to 0}\varphi_1(h) = 0$ olduğundan $\lim\limits_{h\to 0} Df(g(a))\varphi_1(h) = 0$ olur. Ayrıca

$$\lim_{h\to 0}\frac{\|k\|}{\|h\|}\|\varphi_2(k)\| = \lim_{h\to 0}\frac{\|g(a+h)-g(a)\|}{\|h\|}\|\varphi_2(h)\| = \lim_{h\to 0}\frac{\|Dg(a)(h) + \|h\|\varphi_1(h)\|}{\|h\|}\|\varphi_2(h)\|$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[\frac{\|Dg(a)(h)\|}{\|h\|} + \frac{\|h\|\,\|\varphi_1(h)\|}{\|h\|}\right]\|\varphi_2(h)\|$$

$$\leq \lim_{h\to 0}\frac{M\|h\| + \|\varphi_1(h)\| . \|h\|}{\|h\|}\|\varphi_2(h)\|$$

olup, sağ yandaki limit 0 olduğu için $\lim\limits_{h\to 0}\frac{\|k\|}{\|h\|}\|\varphi_2(k)\| = 0$, böylece

$$\lim_{h \to 0} \left[\| f(g(a+h)) - f(g(a)) - Df(g(a)) Dg(a)(h) \| / \| h \| \right] = 0$$

olur, tam türev tek olduğundan

$$D(f \circ g)(a) = Df(g(a)) Dg(a)$$

elde edilir. [Burada verilen M sayısı $Dg(a): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşüm olduğundan her $h \in \mathbb{R}^n$ için $\| Dg(a)(h) \| \leq M \cdot \| h \|$ olacak şekilde var olabilen $M > 0$ sayısıdır. ✱

NOT: Yukarıda sözü edilen (1) eşitliğinde sol yandaki $(p \times n)$-tipinden $D(f \circ g)(a)$ matrisinin, sağ yandaki $(p \times m)$-tipinden $Df(g(a))$ matrisi ile $(m \times n)$-tipinden $Dg(a)$ matrislerinin çarpımı olduğunu belirtir.

Yani $f \circ g$ nin a noktasındaki tam türevine karşılık gelen matris, sırasıyla f nin $g(a)$ noktasındaki tam türevine karşılık gelen

(Φg)

matris ile g nin a noktasındaki tam türevine karşılık gelen matrisin çarpımıdır.

ÖRNEK. $f, g, h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ üç dif. bilir fonk. olsun. Yine $z = f(x,y)$, $x = g(r,\theta)$ ve $y = h(r,\theta)$ olsun.

$\Phi = (g,h)$ olmak üzere $z = \psi(r,\theta) = f(g(r,\theta), h(r,\theta)) = f(\Phi(r,\theta))$ yazılışı dikkate alınarak, $\psi = f \circ \Phi$ fonkuna zincir kuralını uygulayalım:

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad D\psi = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix}, \quad D\Phi = \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta \end{bmatrix}$$

olduğundan, zincir kuralı gereğince

$$D\psi = Df(\Phi)D\Phi \Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} & \frac{\partial z}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \partial x/\partial r & \partial x/\partial \theta \\ \partial y/\partial r & \partial y/\partial \theta \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{bmatrix}$$

olur. Böylece

$$\frac{\partial z}{\partial r} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial r} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial z}{\partial \theta} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

dir.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR