Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Ayrıca F ve T_a lineer olduklarından $T_a(0)=F(0)$ dır. O halde $\mathbb{R}^n$ üzerinde $T_a=F$ dir. #

Tam türev $\mathbb{R}^n$ uzayından $\mathbb{R}^m$ uzayına tanımlı bir lineer fonk. olduğundan, bu fonk.un bir matris gösterimi elde edilebilir.

$V\subset\mathbb{R}^n$ bir açık küme ve $a\in V$ olmak üzere a noktasındaki birinci mertebeden kısmi türevleri varolan her $f:=(f_1,f_2,\dots,f_m):V\to\mathbb{R}^m$ fonk.u için

$$Df(a)=\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(a)\right]_{m\times n}=\begin{bmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a)\end{bmatrix}$$

biçiminde tanımlanan $(m\times n)$– tipinden matrisine f'nin a noktasındaki Jacobi matrisi denir.

$m=n$ olduğunda elde edilen

$$\Delta_f(a) := \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} = \det Df(a)$$

değerine ise, 'f nin a noktasındaki Jacobi determinantı' denir.

14. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık küme, $a \in E$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Eğer f fonk.'u a noktasında diferansiyellenebiliyorsa, o zaman f nin a daki birinci mertebeden kısmi türevleri vardır ve f nin a noktasındaki tam türevi $Df(a)$ olur.

İspat. f nin a noktasındaki tam türevi $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü olsun. ve bu dönüşümü $B := [b_{ij}]_{m \times n}$ matrisi temsil etsin. O zaman her $j = 1, 2, \dots, n$ için

$$T_a(e_j) = (b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{mj})$$

olur. Sabit bir $j = 1, \dots, n$ için $h = u e_j$ alınırsa ($u \in \mathbb{R}$),

$$\frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = \frac{f(a + u e_j) - f(a)}{|u|} - \frac{u}{|u|} T_a(e_j)$$

bulunur. f fonk.un a noktasında diferansiyellenebilir olması gereğince $\lim_{h\to 0}(f(a+h)-f(a)-T_a(h))/\|h\|$ $=0$ olduğundan

$u<0 \Rightarrow |u|=-u$ ikiyan $(-)$

$$\lim_{u\to 0}\frac{f(a+ue_j)-f(a)}{|u|}=\lim_{u\to 0}\left[\frac{u}{|u|}T_a(e_j)\right]\Rightarrow T_a(e_j)$$
$$=(b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{mj})$$

elde edilir. Buna göre

$$\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a)\right)=(b_{1j}, \ldots, b_{mj})$$

ve sonuç olarak $B=Df(a)$ olur.

NOT. Son teoreme göre T_a tam türevi $\mathbb{R}^n$ üzerinde bir lineer dönüşüm olarak

$$T_a(h)=Df(a)(h)$$

biçimindedir. Bu eşitliğin sağ yanı $(m\times n)$-tipinden $Df(a)$ Jacobi matrisi ile $(n\times 1)$-tipinden $[h]$ matrisinin çarpımından oluşur.

Bu durumda $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in E$, $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olmak üzere

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - Bh}{\|h\|} = 0$$

koşulunu sağlayan bir B matrisi var olduğunda, f nin a noktasında diferansiyellenebilir olduğu ve $B = Df(a)$ olması gerektiği sonucuna ulaşılır.

Bundan sonra $Df(a)$ sembolü hem T_a tam türevinin hemde Jacobi matrisinin yerine kullanılacaktır.

Eğer $n = 1$ ise

$$Df(a) = \begin{bmatrix} f_1'(a) \\ \vdots \\ f_m'(a) \end{bmatrix}$$

matrisi ile eşlenen vektör

$$f'(a) = (f_1'(a), \dots, f_m'(a))$$

olarak gösterilir.

Eğer $m=1$, yani f fonkun reel değerli ise

$$Df(a)=\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(a) \;\ldots\; \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right]$$

matrisi ile eşlenen vektör gradyen vektörüdür.

15. Teorem. $E\subset\mathbb{R}^n$ bir açık alt küme olmak üzere $f:E\to\mathbb{R}^m$ fonku verilsin. Eğer f fonku bir $a\in E$ noktasında diferansiyellenebilirse, o zaman f fonku a noktasında süreklidir.

İspat. f fonku a noktasında diferansiyellenebilirse,

$$\lim_{h\to 0}\,[f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)]/\|h\|=0$$

olup, $\varepsilon=1$ sayısına karşılık $0<\|h\|<\delta$ ise

$$\|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|/\|h\|<1 \Leftrightarrow \|f(a+h)-f(a)-Df(a)(h)\|<\|h\|$$

olacak şekilde bir $\delta>0$ vardır. Buna göre

$$\|f(a+h)-f(a)\|\le\|Df(a)(h)\|+\|h\|$$

yazılır.

(51)

$Df(a)(\cancel{x}) = [b_{ij}]_{m\times n}$ ve $A = \sup\{|b_{ij}| : 1 \le i \le m,\ 1 \le j \le n\}$ olmak üzere

$$\|Df(a)(h)\| = \left\|\left(\sum_{j=1}^{n} b_{1j}\cdot h_j, \dots, \sum_{j=1}^{n} b_{mj}\, h_j\right)\right\|$$

$$\le \left[\left(\sum_{j=1}^{n} |b_{1j}\, h_j|\right)^2 + \dots + \left(\sum_{j=1}^{n} |b_{mj}\, h_j|\right)^2\right]^{1/2}$$

$$\le \left[m(A+1)^2 \left(\sum_{j=1}^{n} |h_j|\right)^2\right]^{1/2} = \left(m(A+1)^2 n^2 \|h\|^2\right)^{1/2}$$

olup, buradan $0 < \|h\| < \delta$ ise

$$\|f(a+h) - f(a)\| \le \left(\sqrt{m}(A+1)n + 1\right)\|h\|$$

elde edilir. O halde $h \to 0$ iken $f(a+h) \to f(a)$ gerçekleşir, dolayısıyla f fonk. u a noktasında süreklidir. ✱

Teorem 12 de dif. bilir bir fonk.un o noktada birinci mertebeden kısmi türevlerinin var olduğu gösterildi. Aşağıdaki teoremde bunun tersinin genelde doğru ~~olmadığını~~ göreceğiz. Önce iki örnek inceleyelim:

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} x+y, & x=0 \vee y=0 \\ 1, & x\neq 0 \wedge y \neq 0 \end{cases}$

fonk.un $(0,0)$ noktasında dif. bilir değil, ama birinci mertebeden kısmi türevlerinin var ~~olmadığını~~ olduğunu göstere-lim.

$$\lim_{x\to 0} f(x,x) = 1 \neq 0 = f(0,0)$$

olduğundan f fonk.u $(0,0)$ noktasında sürekli değildir, dolayısıyla $(0,0)$ noktasında dif. bilir olmaz.

Öte yandan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

ve $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k) - f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} \frac{k-0}{k} = 1$

olduğundan, f nin $(0,0)$ noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri var ve eşittir. #

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3 - xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonk.un sürekliliğini, dif. bilirliğini, kısmi türevlerinin varlığını ve sürekliliğini inceleyelim.

f nin tanımına göre her $(x,y) \neq (0,0)$ noktasında f fonk.un birinci mertebeden kısmi türevleri var ve süreklidir. Ayrıca $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$|f(x,y)| = \frac{|x|\,|x^2 - y^2|}{x^2+y^2} \leq |x|$$

olduğundan,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

olur.

Buna göre f fonk.'u $(0,0)$ noktasında ve dolayısıyla tüm $\mathbb{R}^2$ üzerinde süreklidir.
Yine

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{h-0}{h}=1$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k}=\lim_{k\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

olduğuna göre f fonk.'un $(0,0)$ dahi kısmi türevleri var, ama farklıdır.

f fonk.'un $(0,0)$ da dif.bilir olduğunu varsayalım. O zaman

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3-hk^2}{h^2+k^2}-(1,0)\cdot(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\frac{h^3-hk^2}{h^2+k^2}-h}{\sqrt{h^2+k^2}}=\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{-2hk^2}{(h^2+k^2)^{3/2}}=0$$

olması gerekirdi, ama (15) $h=k$ yolu üzerinden buradaki limit değeri

$$\lim_{h\to 0^+} \frac{-2h^3}{(2h^2)^{3/2}} = -1/\sqrt{2} \neq 0$$

olduğundan bu mümkün olmaz. #

Son iki örneğe göre bir noktada kısmi türevlerin var olması ya da fonk.un sürekli olması, o noktada fonk.un dif.bilir olması için yeterli değildir.

Ama fonk.un bir açık küme üzerinde dif.bilir olması için C^1-sınıfından olmak yeterlidir.

16. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in E$ ve $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Eğer E üzerinde f nin birinci mertebeden kısmi türevleri var ve a noktasında sürekli ise, o zaman f fonk.u a noktasında dif. bilirdir.

İspat. $m=1$ için ispatı yapmak yeterli olacaktır, çünkü $m>1$ f nin dif.bilir olması m tane bileşen fonk.un dif.bilir olması demektir.

(58)

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)-\nabla f(a)\cdot h}{\|h\|} = 0$$

olduğu gösterilmelidir.

$a:=(a_1,\dots,a_n)$ olsun ve V nin açık olmasını dikkate alarak, $h:=(h_1,\dots,h_n)\neq 0$ vektörü $a+h\in V$ olacak şekilde alınsın.

Lagrange Ortalama Değer Teoremine göre her $j=1,2,\dots,n$ için

$$\begin{aligned}
f(a+h)-f(a) &= f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\\
&= f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)\\
&\quad + f(a_1,a_2+h_2,\dots,a_n+h_n)-f(a_1,a_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\
&\quad \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots\\
&\quad + f(a_1,a_2,\dots,a_{n-1},a_n+h_n)-f(a_1,\dots,a_n)\\
&= h_1\frac{\partial f}{\partial x_1}(c_1,a_2+h_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\
&\quad + h_2\frac{\partial f}{\partial x_2}(a_1,c_2,a_3+h_3,\dots,a_n+h_n)\\
&\quad \vdots \qquad \vdots \qquad \vdots
\end{aligned}$$

$$+ h_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(a_1, \dots, a_{n-1}, c_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}+\dots+a_n+h_n)$$

olacak şekilde a_j ve a_j+h_j noktaları arasında c_j sayıları vardır.

O zaman

$$f(a+h)-f(a)-\nabla f(a).h = \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}, \dots, a_n+b_n)$$

$$-\left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).(h_1, \dots, h_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}, \dots, a_n+b_n)$$

$$- \sum_{j=1}^{n} h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)$$

$$= \sum_{j=1}^{n} h_j \underbrace{\left[\frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_{j-1}, c_j, a_{j+1}+h_{j+1}, \dots, a_n+h_n) - \frac{\partial f}{\partial x_j}(a_1, \dots, a_n)\right]}_{u_j}$$

$$= h.u$$

dur. f nin birinci mertebeden kısmi türevleri a noktasında sürekli olduğu için $h \to 0$ iken $u_j \to 0$ $(j=1,\dots,n)$ ve dolayısıyla $h \to 0$ iken $\|u\| = \|(u_1,\dots,u_n)\| \to 0$ olur. Bu durumda Cauchy-Schwarz Eşitsizliği ile $h \neq 0$ için

$$0 \leq |f(a+h) - f(a) - \nabla f(a).h| / \|h\| = |h.u| / \|h\| \leq \frac{\|h\|.\|u\|}{\|h\|} = \|u\|$$

olup, bu eşitsizlikte $h \to 0$ iken limite geçilirse,

$$\lim_{h \to 0} (f(a+h) - f(a) - \nabla f(a).h) / \|h\| = 0$$

elde edilir. Bu ise f nin a noktasında dif. bilir olması demektir.

ÖRNEK. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} (x^2+y^2)\sin\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} & , (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonk.un $\mathbb{R}^2$ üzerinde C^1 sınıfından olup olmadığını belirleyiniz. Ayrıca $\mathbb{R}^2$ de dif. bilir olup olmadığına bakınız.

Çözüm. $f \in C^1(\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\})$ olduğu açıktır, son teorem gereğince f fonk.u $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ üzerinde diferansiyellenebilirdir. Ayrıca

$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} h^2 \sin\frac{1}{|h|} = 0$$

ve

$$f_y(0,0) = \lim_{k\to 0} \frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0} k^2 \sin\frac{1}{|k|} = 0$$

olur. Buna göre

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{f(h,k)-f(0,0)-\nabla f(0,0).(h,k)}{\|(h,k)\|} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{(\sqrt{h^2+k^2})^2 . \sin(1/\sqrt{h^2+k^2}) - (0,0).(h,k)}{\sqrt{h^2+k^2}}$$

$$= \lim_{(h,h)\to(0,0)} \sqrt{h^2+k^2}\, \sin(1/\sqrt{h^2+k^2}) = 0$$

olacağından, f fonk.u (0,0) noktasında dif. bilirdir.
Böylece f fonk.un $\mathbb{R}^2$ üzerinde dif. bilir olduğu görülür.
Öte yandan her $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$f_x(x,y) = 2x \sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) + (x^2+y^2).\cos(1/\sqrt{x^2+y^2}).(x+y)^{-3/2}.(-x)$$

$$= 2x \sin(1/\sqrt{x^2+y^2}) - (x/\sqrt{x^2+y^2}).\cos(1/\sqrt{x^2+y^2})$$

olup, $\lim\limits_{x\to 0} f_x(x,0) = \lim\limits_{x\to 0}\left[-\frac{x}{|x|}\cos(1/|x|) + 2x\sin(1/|x|)\right]$ limiti olmadığından f_x kısmi türevi (0,0) noktasında sürekli değildir.
Buna göre f fonk.u $\mathbb{R}^2$ üzerinde C^1-sınıfından olamaz.

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR