UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II
Örnekler

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 7

ÖRNEKLER

Örnek: A bir kafes ve $a \leq b$ ise $\forall x \in A$ için

$$a \vee x \leq b \vee x$$

olduğunu gösteriniz.

A bir kafes olduğundan herhangi iki elemanın supremumu vardır.

$$c = \sup\{b, x\} = b \vee x$$

olsun.

$$b \leq c \text{ ve } x \leq c \implies a \leq c \text{ ve } x \leq c$$

$$a \leq b$$

olduğundan, supremumun tanımından

$$\sup\{a, x\} = a \vee x \leq c = b \vee x$$

$$\implies a \vee x \leq b \vee x$$

Örnek: $m, n, p, q \in \mathbb{N}$ olsun.

$$m < n \wedge p < q \Longrightarrow mp < nq$$

olduğunu gösteriniz.

$$m < n \Longleftrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* \ni n = m + k$$

$$p < q \Longleftrightarrow \exists\, t \in \mathbb{N}^* \ni q = p + t$$

$$\begin{aligned} nq &= (m+k)(p+t) \\ &= mp + mt + kp + kt \\ &= mp + r, \quad r = mt + kp + kt \in \mathbb{N}^* \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}^* \ni nq = mp + r$$

$$\Rightarrow mp < nq$$

Örnek: $m, n, p \in \mathbb{N}$ olsun.

$$n < m \Longrightarrow (n+p)m < m^2 + pm$$

olduğunu gösteriniz.

$$n < m \Longrightarrow \exists\, k \in \mathbb{N}^* \ni m = n + k$$

$$m^2 = m \cdot m = m(n+k)$$
$$= mn + mk$$

$$m^2 + pm = (mn + mk) + pm$$
$$= (mn + pm) + mk$$
$$= (nm + pm) + mk$$
$$= (n+p)m + mk$$
$$= (n+p)m + r \quad , \quad r = mk$$

$\Rightarrow \exists\, r \in \mathbb{N}^* \ni m^2 + pm = (n+p)m + r$

$\Rightarrow (n+p)m < m^2 + pm$

örnek: $[3,2] + [5,3]\,[2,8] = [3,2] + [34,46]$
$$= [37,48]$$

örnek: $[3,1]\,[1,2] + [4,2] < [2,a]$ sağlayan a sayısını bulunuz.

$[3,1]\,[1,2] + [4,2] < [2,a] \Leftrightarrow [5,7] + [4,2] < [2,a]$

$$\Leftrightarrow [9,9] < [2,a]$$
$$\Leftrightarrow 9+a < 9+2$$
$$\Leftrightarrow a < 2$$
$$\Rightarrow a = 0 \vee 1$$

örnek: $\forall a,b,c \in \mathbb{Z}$ için $a(b+c) = ab+ac$ olduğunu gösteriniz.

$a = [x,y]$ $b = [m,n]$, $c = [z,t]$, $x,y,m,n,z,t \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} a(b+c) &= [x,y]\left([m,n] + [z,t]\right) \\ &= [x,y] \cdot [m+z, n+t] \\ &= [xm + xz + yn + yt,\ xn + xt + ym + yz] \ldots (1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} ab+ac &= [x,y][m,n] + [x,y][z,t] \\ &= [xm+yn, xn+ym] + [xz+yt, xt+yz] \\ &= [xm+xz+yn+yt,\ xn+xt+ym+yz] \ldots (2) \end{aligned}$$

① ve ② den $a(b+c)=ab+ac$

Örnek: $a,b,c\in\mathbb{Z}$ olmak üzere
$2|a+b \wedge 2|c-2 \Longrightarrow 2|a+b+c$ olduğunu gösteriniz.

$$\left.\begin{array}{l} 2|a+b \Longrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \ni a+b=2k \\ 2|c-2 \Longrightarrow \exists t\in\mathbb{Z} \ni c-2=2t \end{array}\right\} \Longrightarrow a+b+c-2=2k+2t$$

$$\Longrightarrow a+b+c=2k+2t+2$$
$$\Longrightarrow a+b+c=2(k+t+1)$$
$$\Longrightarrow 2|a+b+c$$

Örnek: $m,n\in\mathbb{Z}$ ve $(m,n)=1$ olsun. $(m^2,mn,n^2)=d$ sağlayan $d\in\mathbb{Z}$ yi bulunuz.

$(m,n)=1 \Longrightarrow \exists x,y\in\mathbb{Z} \ni mx+ny=1$

$\Longrightarrow m^2x^2+2mnxy+n^2y^2=1$ ...... ①

$(m^2, mn, n^2) = d \Rightarrow d \mid m^2,\ d \mid mn,\ d \mid n^2$

$\underset{x,y \in \mathbb{Z}}{\Longrightarrow} d \mid m^2x^2,\ d \mid mn2xy,\ d \mid n^2y^2$

$\Longrightarrow d \mid m^2x^2 + 2xymn + n^2y^2$

$\underset{①}{\Longrightarrow} d \mid 1 \underset{d>0}{\Longrightarrow} d = 1$

Örnek: $a \in \mathbb{Z}^+$ için $[a, 2a+1] = ?$

$(a, 2a+1)[a, 2a+1] = a(2a+1)$

$\Rightarrow [a, 2a+1] = \dfrac{a(2a+1)}{(a, 2a+1)}$

$(a, 2a+1) = d$ olsun $\Rightarrow d \mid a,\ d \mid 2a+1$

$\Rightarrow d \mid 2a,\ d \mid 2a+1$

$\Rightarrow d \mid 2a+1-2a \Rightarrow d \mid 1$

$\Rightarrow d = 1$

$\Rightarrow [a, 2a+1] = \dfrac{a(2a+1)}{1} = 2a^2 + a$

Örnek: $[(m,n)] \oplus [(p,q)] = [(mq+np, nq)]$
$= [(qm+pn, qn)]$
$= [(pn+qm, qn)]$
$= [(p,q)] \oplus [(m,n)]$

Örnek: $\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ denk olsun. $mn>0 \Rightarrow pq>0$ olduğunu gösteriniz.

$\frac{m}{n}, \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ denk $\Rightarrow [(m,n)] = [(p,q)]$
$\Rightarrow mq = np$
$\Rightarrow (mq)^2 = (mq)(np)$
$= \underbrace{(mn)}_{>0}(pq)$

$\Rightarrow pq > 0$

Örnek: $p^* + q^* = (p+q)^*$ olduğunu gösteriniz.

$\forall w \in p^* + q^*$ için $\exists x \in p^* \wedge \exists y \in q^* \ni w = x + y$

$\Longrightarrow w = x + y < p + q$

$\Longrightarrow w = x + y \in (p+q)^*$

$\forall w \in (p+q)^*$ için $w < p + q$

$h = (p+q) - w > 0$ olsun.

$s = p - \frac{h}{2} < p \Longrightarrow s \in p^*$

$t = q - \frac{h}{2} < q \Rightarrow t \in q^*$

$\Longrightarrow s + t = w \in p^* + q^*$

$\therefore (p+q)^* = p^* + q^*$

Örnek: X ve Y iki küme $X \times Y$ sayılabilir ise Y sayılabilir mi? Gösteriniz.

$\Pi_2 : X \times Y \longrightarrow Y$

$(x,y) \longmapsto \Pi_2(x,y) = y$

fonksiyonu $\forall y \in Y$ için $\exists (x,y) \in X \times Y \ni \Pi_2(x,y) = y$ olduğundan örtendir.

$$\left.\begin{array}{l} X \times Y \text{ sayılabilir} \\ \Pi_2 \text{ örten} \end{array}\right\} \Longrightarrow Y \text{ sayılabilirdir.}$$

örnek: X sayılabilir bir küme, $Y = \left\{ \frac{n}{2} : n \in \mathbb{Z} \right\}$ olsun. $X \times (Y \cap \mathbb{R})$ kümesi sayılabilir mi? Gösteriniz.

$Y \cap \mathbb{R} = Y$

$Y \subseteq \mathbb{Q}$ olup $\mathbb{Q}$ sayılabilir ve sayılabilir bir kümenin her alt kümeside sayılabilir olduğundan Y sayılabilirdir.

X sayılabilir, Y sayılabilir $\Longrightarrow$ $X \times Y$ sayılabilir mi?

X sayılabilir $\Longleftrightarrow \exists f : X \longrightarrow A \subseteq \mathbb{N}$ 1-1, örten

Y sayılabilir $\Longleftrightarrow \exists g : Y \longrightarrow B \subseteq \mathbb{N}$ 1-1, örten

$$h : X \times Y \longrightarrow A \times B \subseteq \mathbb{N} \times \mathbb{N}$$
$$(x,y) \longmapsto h(x,y) = (f(x), g(y))$$ tanımlayalım.

- h iyi tanımlı mı?

$\forall (a,b), (x,y) \in X \times Y$ için

$$\begin{aligned}
(x,y) = (a,b) &\Longrightarrow x = a \in X \ \wedge \ y = b \in Y \\
&\Longrightarrow f(x) = f(a) \ \wedge \ g(y) = g(b) \\
&\Longrightarrow (f(x), g(y)) = (f(a), g(b)) \\
&\Longrightarrow h(x,y) = h(a,b)
\end{aligned}$$

- h 1-1 mi?

$\forall (a,b), (x,y) \in X \times Y$ için

$$\begin{aligned}
h(x,y) = h(a,b) &\Longrightarrow (f(x), g(y)) = (f(a), g(b)) \\
&\Longrightarrow f(x) = f(a), \quad g(y) = g(b) \\
&\Longrightarrow x = a, \quad y = b \\
&\Longrightarrow (x,y) = (a,b)
\end{aligned}$$

- h örten mi?

$\forall (m,n) \in A \times B$ için $\exists (x,y) \in X \times Y \ni h(x,y) = (m,n)$?

$\forall (m,n) \in A \times B \Longrightarrow m \in A \wedge n \in B$

$\Longrightarrow \exists x \in X \ni f(x) = m$ ve $\exists y \in Y \ni g(y) = n$

$$h(x,y) = (f(x), g(y)) = (m,n)$$

$\therefore X \times Y$ sayılabilirdir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ