ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II

Sayılabilirlik

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 6

SAYILABİLİR KÜMELER

Tanım: X ve Y iki küme olsun. Eğer X den Y ye 1-1 ve örten bir fonksiyon varsa X ve Y aynı güçtedir (eş güçlüdür) denir.

Aynı güçte olma kümeler ailesinde bir denklik bağıntısıdır.

$$X \sim Y \iff X \text{ ve } Y \text{ aynı güçte}$$
$$\iff \exists f : X \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} Y$$

Bir kümenin bu bağıntıya göre denklik sınıfına o kümenin gücü denir.

Teorem (Cantor Teoremi): Bir $A \neq \emptyset$ kümesi verildiğinde A ile P(A) kümesi eş güçlüdür

NOT: X ve Y sıralı kümeler ve X ile Y aynı güçte ise X ve Y nin eleman sayısı aynıdır.

Tanım: Bir X kümesi $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin bir alt kümesi ile aynı güçte ise X sayılabilir bir kümedir denir.

$$X \text{ sayılabilir} \iff \exists f : X \xrightarrow[\text{örten}]{1-1} A \subseteq \mathbb{N}$$

Özellikler

1) X sonlu bir küme ve n elemanlı olsun. X, $\{1, 2, \ldots, n\}$ kümesi ile aynı güçtedir.

$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ olsun.

$$f : X \longrightarrow \{1, 2, \ldots, n\}$$
$$x_1 \longmapsto 1$$
$$x_2 \longmapsto 2$$
$$\vdots \qquad \vdots$$
$$x_n \longmapsto n$$

şeklinde tanımlanan f 1-1 ve örtendir.

$\therefore$ X sayılabilirdir.

ii) X sonsuz ve sayılabilir ise $\mathbb{N}$ ile aynı güçtedir.

X sayılabilir, sonsuz $\Longrightarrow \exists\, f: X \longleftrightarrow Y \subseteq \mathbb{N}$

Y nin elemanlarını $y_1 \leq y_2 \leq \cdots$ şeklinde büyüklük sırasına göre sıralarsak

$$g: Y \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{1-1 ve örten olur}$$
$$y_1 \longmapsto 1$$
$$y_2 \longmapsto 2$$
$$\vdots$$

$\Longrightarrow Y$ ile $\mathbb{N}$ aynı güçte

$\therefore$ X ile Y aynı güçte, Y ile $\mathbb{N}$ aynı güçte olduğu için X ile $\mathbb{N}$ aynı güçte olur.

iii) X sonsuz bir küme olsun.

X sayılabilir $\Longleftrightarrow$ X in elemanları sonsuz bir dizi biçiminde sıralanabilir

($\Longrightarrow$:) X sayılabilir olsun. X sonsuz olduğundan X, $\mathbb{N}$ ile aynı güçtedir.

$$\Rightarrow \exists f: \mathbb{N} \longrightarrow X$$
$$1 \longmapsto x_1$$
$$2 \longmapsto x_2$$
$$\vdots$$
$$n \longmapsto x_n$$
$$\vdots$$

Bu durumda X in elemanları $(x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ dizisini oluşturur.

$(\Leftarrow:)$ X sonsuz bir küme ve X in elemanları sonsuz bir dizi halinde sıralanabilir olsun. $X = (x_1, x_2, \dots, x_n, \dots)$ yazılır.

$$f: X \longrightarrow \mathbb{N} \qquad \text{1-1 ve örten.}$$
$$x_1 \longmapsto 1$$
$$x_2 \longmapsto 2$$
$$\vdots$$

$\therefore$ X sayılabilirdir.

NOT: A sayılabilir ise alt kümesi de sayılabilirdir.

Önerme: X, Y iki küme, $f : X \longrightarrow Y$ örten bir fonksiyon olsun. X sayılabilir ise Y de sayılabilirdir.

$f : X \longrightarrow Y$ örten olduğundan $f(X) = Y$ dir. Yani $\forall y \in Y$ için $\exists\, x_y \in X \ni f(x_y) = y$ olur.

$$g : Y \longrightarrow g(Y) \subseteq X$$
$$y \longmapsto g(y) = x_y$$

g, 1-1 ve örtendir.

$$\left.\begin{array}{l} X \text{ sayılabilir} \\ g(Y) \subseteq X \end{array}\right\} \Rightarrow g(Y) \text{ sayılabilir}$$

$\Rightarrow Y$ de sayılabilirdir.

Önerme: X sayılabilir bir küme, R X üzerinde bir denklik bağıntısı ise X/R de sayılabilirdir.

$$\varphi : X \longrightarrow X/R$$
$$x \longmapsto \varphi(x) = \overline{x}$$

dönüşümü örten ve X de sayılabilir olduğundan bir önceki önermeden X/R de sayılabilirdir.

Önerme: Sayılabilir kümelerin sonlu her çarpımı sayılabilirdir.

Önerme: $X_1, X_2, \dots, X_n$ sayılabilir kümeler ise $\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} X_i$ sayılabilirdir.

$$\bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} X_i = X_1 \cup X_2 \cup \dots \cup X_n \cup \dots$$

$\forall i \in \mathbb{N}^*$ için X_i sayılabilir olduğundan $X_i = \{x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}, \dots\}$ yazabiliriz.

$$f : \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} X_i \longrightarrow Y \subseteq \mathbb{N}$$
$$x_{i_m} \longmapsto f(x_{i_m}) = 2^i 3^m$$

fonksiyonu 1-1 ve örtendir.

$\therefore \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} X_i$ sayılabilirdir.

Örnek: $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-\mathbb{N}\}$ olmak üzere $\mathbb{Z}$ sayılabilir kümelerin birleşimi olduğundan sayılabilirdir.

Örnek: $\mathbb{Q}$ sayılabilirdir.

$\mathbb{Q} = \{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ n \neq 0 \}$, $\mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ için $A_n = \{ \frac{m}{n} : m \in \mathbb{N}^* \}$ olsun.

$$\left. \begin{array}{l} A_1 = \{1, 2, 3, \dots\} = \mathbb{N} \\ A_2 = \{\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \dots\} \\ \vdots \\ A_n = \{\frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \dots\} \end{array} \right\} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n = \mathbb{Q}_+$$

$\forall n \in \mathbb{N}^*$ için A_n sayılabilirdir.

$$\begin{aligned} f : A_n &\longrightarrow B \subseteq \mathbb{N} \\ \frac{m}{n} &\longmapsto f(\frac{m}{n}) = m \end{aligned}$$

1-1 ve örtendir.

$\therefore\ \mathbb{Q}_+ = \bigcup_{n \in \mathbb{N}^*} A_n$ sayılabilirdir.

Benzer şekilde $\mathbb{Q}_-$ de sayılabilirdir.

$\therefore\ \mathbb{Q} = \mathbb{Q}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Q}_-$ sayılabilirdir.

Örnek: $\mathbb{R}$ sayılamaz.

Olmayana ergi yöntemini kullanalım. $\mathbb{R}$ sayılabilir bir küme olsun. $\mathbb{R}$ sayılabilir olduğundan $[0,1)$ de sayılabilirdir. O halde

$[0,1)$ aralığındaki tüm sayıları $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ dizisi halinde sıralamak mümkündür. Bu sayıların her birini ondalık sisteme göre normal bir açılımı vardır.

$$x_1 = 0,\alpha_1^1\alpha_2^1\alpha_3^1 \ldots \alpha_n^1 \ldots$$
$$x_2 = 0,\alpha_1^2\alpha_2^2\alpha_3^2 \ldots \alpha_n^2 \ldots$$
$$\vdots$$
$$x_n = 0,\alpha_1^n\alpha_2^n\alpha_3^n \ldots \alpha_n^n \ldots$$

$$x = 0,\alpha_1\alpha_2\alpha_3 \ldots \ni \alpha_n = \begin{cases} 1, & \alpha_n^n = 0 \text{ ise} \\ 0 & \alpha_n^n \neq 0 \text{ ise} \end{cases} \quad \text{olsun.}$$

$x \in [0,1)$ dir.

x sayısı yukarıda çizelgede bulunan sayıların hiç birine eşit olmaz. Çünkü $n \in \mathbb{N}^*$ için x in $n+1$. basamağındaki rakam ile x_n nin $n+1$. basamağındaki rakam birbirinden farklıdır. Böylece her $n \in \mathbb{N}^*$ için $x \neq x_n$ olup bu bir çelişkidir.

$\therefore \mathbb{R}$ sayılamaz.

Tanımı: $\mathbb{N}$ doğal sayıların $\{1,2,\dots,n\}$ alt kümesi ile eş güçlü olan kümeye sonlu küme, sonlu olmayan kümeye sonsuz küme denir.

Önerme: $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi sayılabilir sonsuz bir kümedir.

Önerme! A sonlu bir küme ise her alt kümesi de sonludur.

Tanımı: $A, B \neq \emptyset$, $B \subseteq A$ olsun. $\forall\, x \in A$ için

$$\chi_B = \begin{cases} 1, & x \in B \text{ ise} \\ 0, & x \notin B \text{ ise} \end{cases}$$

ile tanımlanan $\chi_B : A \longrightarrow \{0,1\}$ fonksiyonuna B nin karakteristik fonksiyonu denir.

Tanımı: $A \neq \emptyset$ olsun. $\forall i \in I$ için $\emptyset \neq A_i \subseteq A$ olmak üzere $\{A_i : i \in I\}$ küme ailesini göz önüne alalım. $\forall i \in I$ için $f(A_i) \in A_i$ olacak şekilde bir $f : \{A_i : i \in I\} \longrightarrow A$ fonksiyonuna $\{A_i : i \in I\}$ küme ailesi için bir seçme fonksiyonuna A için bir seçme fonksiyonu denir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ