ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik II
Tam Sayılar

Dr. Öğr. Üyesi Abdullah DERTLİ

Ders 3

Tam Sayılar

$x+2=5$ denkleminin doğal sayılarda çözümü bulunabilir. $x+5=2$ denkleminin doğal sayılarda çözümü yoktur. Dolayısıyla doğal sayılar sistemini genişletme zorunluluğu ortaya çıkar. Aşağıda vereceğimiz tanıma yorum getirmek için her bir doğal sayının iki doğal sayının farkı olarak çeşitli şekillerde yazılabileceğini göz önüne alalım.

Örneğin; 3 doğal sayısını $3-0$, $4-1$, $5-2$, ... şeklinde yazabiliriz. Bu sayılara $(3,0)$, $(4,1)$, $(5,2)$, ... sıralı ikilileri karşılık getirilebilir. Bu sıralı ikililerin ortak özelliği (a,b), (c,d) sıralı ikilisi için

$$\boxed{a+d=b+c}$$

olmasıdır.

Tanım: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir $\sim$ bağıntısı $(a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$(a,b)\sim(c,d) \Longleftrightarrow a+d=b+c$$

şeklindedir.

Önerme: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan $\sim$ bağıntısı bir denklik bağıntısıdır.

İspat: i) yansıma özelliği

$\forall (a,b)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için $a+b=b+a$ olup $(a,b)\sim(a,b)$

ii) simetri özelliği

$\forall (a,b),(c,d)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$(a,b)\sim(c,d) \Longrightarrow a+d=b+c$$
$$\Longrightarrow b+c=a+d$$
$$\Longrightarrow c+b=d+a \Longrightarrow (c,d)\sim(a,b)$$

iii) geçişme özelliği:

$\forall (a,b), (c,d), (e,f) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N}$ için

$$\left.\begin{array}{l}(a,b) \sim (c,d) \Rightarrow a+d = b+c \\ (c,d) \sim (e,f) \Rightarrow c+f = d+e\end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow (a+f) + (d+c) = (b+e) + (d+c)$$
$$\Rightarrow a+f = b+e \Rightarrow (a,b) \sim (e,f)$$

NOT: $\sim$, $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ üzerinde bir denklik bağıntısı olup $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'yi denklik sınıflarına ayırır. Sınıfların ikişer ikişer kesişimleri boş, birleşimleri $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$'yi verir. $\sim$ nın denklik sınıflarının kümesine tam sayılar kümesi, her bir denklik sınıfına ise tam sayı denir.

Tanım: $$\mathbb{N}\times\mathbb{N}/\sim = \{ \overline{(a,b)} : (a,b) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \}$$
$$= \{ [a,b] \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} \} = \mathbb{Z}$$

$$\overline{(a,b)} = [a,b] = \{ (x,y) : (x,y) \sim (a,b) \}$$
$$= \{ (x,y) : x+b = y+a \}$$

Örnek: Yukarıda tanımlanan denklik bağıntısına göre $[0,5]$ ve $[5,0]$ kümelerini belirleyiniz.

$$[0,5] = \{ (0,5), (1,6), (2,7), \ldots \}$$
$$[5,0] = \{ (5,0), (6,1), (7,2), \ldots \}$$

Tanım: ($\mathbb{Z}$ de toplama ve çarpma)

i) $\oplus : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$([a,b], [c,d]) \longmapsto [a,b] \oplus [c,d] = [a+c, b+d]$$

$[a,b]$ ile $[c,d]$ nin toplamı

ii) $\odot : \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Z}$

$$([a,b], [c,d]) \longmapsto [a,b] \odot [c,d] = [ac+bd, ad+bc]$$

$[a,b]$ ile $[c,d]$ nin çarpımı

denir.

⊕ (Toplamanın) iyi tanımlılığı:

$([a,b],[c,d]),([a',b'],[c',d']) \in \mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ için

$([a',b'],[c',d']) = ([a,b],[c,d]) \Longrightarrow [a',b'] \oplus [c',d'] = [a,b] \oplus [c,d]$?

$$\begin{aligned}
([a',b'],[c',d']) = ([a,b],[c,d]) &\Rightarrow [a',b'] = [a,b] \wedge [c',d'] = [c,d] \\
&\Rightarrow (a',b') \sim (a,b) \wedge (c',d') \sim (c,d) \\
&\Rightarrow a'+b = b'+a \wedge c'+d = d'+c \\
&\Rightarrow (a'+b)+(c'+d) = (b'+a)+(d'+c) \;\ldots\; (*)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[a',b'] \oplus [c',d'] = [a,b] \oplus [c,d] &\Leftrightarrow [a'+c', b'+d'] = [a+c, b+d] \\
&\Leftrightarrow (a'+c', b'+d') \sim (a+c, b+d) \\
&\Leftrightarrow a'+c'+b+d = b'+d'+a+c \;\ldots\; (**)
\end{aligned}$$

$(*) = (**)$

olduğundan ⊕ iyi tanımlıdır.

Benzer şekilde çarpmanın iyi tanımlılığı da gösterilebilir.

Örnek: $[5,3], [7,2] \in \mathbb{Z}$

$$[5,3] \oplus [7,2] = [12,5]$$

$$[5,3] \odot [7,2] = [35+6, 10+21]$$
$$= [41, 31]$$

Önerme: $[a,b], [c,d], [e,f] \in \mathbb{Z}$ için

i) $[a,b] \oplus [c,d] = [c,d] \oplus [a,b]$

ii) $[a,b] \oplus ([c,d] \oplus [e,f]) = ([a,b] \oplus [c,d]) \oplus [e,f]$

iii) $[a,b] \odot [c,d] = [c,d] \odot [a,b]$

iv) $[a,b] \odot ([c,d] \odot [e,f]) = ([a,b] \odot [c,d]) \odot [e,f]$

v) $[a,b] \odot ([c,d] \oplus [e,f]) = ([a,b] \odot [c,d]) \oplus ([a,b] \odot [e,f])$

İspat: i) $[a,b] \oplus [c,d] = [a+c, b+d]$
$$= [c+a, d+b]$$
$$= [c,d] \oplus [a,b]$$

iii) $[a,b] \odot [c,d] = [ac+bd, ad+bc]$

$$= [ca+db,\ da+cb]$$
$$= [ca+db,\ cb+da]$$
$$= [c,d] \odot [a,b]$$

Diğerleri de benzer şekilde yapılır.

Önerme: $[a,b] \in \mathbb{Z}$, $e,f \in \mathbb{N}$ için

i) $[a,b] \oplus [e,e] = [a,b]$

ii) $[a,b] \oplus [b,a] = [e,e]$

iii) $[a,b] \odot [f+1,f] = [a,b]$

İspat: i) $[a,b] \oplus [e,e] = [a+e,\ b+e]$

$$[a+e,\ b+e] = \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : (a+e,\ b+e) \sim (x,y)\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+e+y = b+e+x\}$$
$$= \{(x,y) \in \mathbb{N}\times\mathbb{N} : a+y = b+x\} = [a,b]$$

ii) $[a,b] \oplus [b,a] = [a+b, b+a]$

$[a+b, b+a] = \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (a+b, b+a) \sim (x,y) \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a+b+y = b+a+x \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : y = x \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : e+y = e+x \}$
$= [e,e]$

iii) $[a,b] \odot [f+1, f] = [af+a+bf, af+bf+b]$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : (af+a+bf, af+bf+b) \sim (x,y) \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : af+a+bf+y = af+bf+b+x \}$
$= \{ (x,y) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} : a+y = b+x \}$
$= [a,b]$

Tanım: $[a,b] \in \mathbb{Z}$ için $[b,a] = -[a,b]$ olarak tanımlanır.

Tanım: $[a,b], [c,d] \in \mathbb{Z}$ için

$$[a,b] \leq [c,d] \iff a+d \leq b+c$$

NOT: i) $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $m>n$ olsun. $[m,n] > 0$ olur.
ii) $\forall p \in \mathbb{N}$ için $[p,p] = 0$
iii) $\forall m,n \in \mathbb{N}$ için $n>m$ olsun. $[m,n] < 0$ olur.

Tanım: $\mathbb{Z}_+ = \{ k_+ = [n+k, n] : n,k \in \mathbb{N} \}$
pozitif tam sayılar kümesi
$\mathbb{Z}_- = \{ q_- = [m, m+q] : m,q \in \mathbb{N} \}$
negatif tam sayılar kümesi

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_+ \cup \{0\} \cup \mathbb{Z}_-$$

Önerme: $(\mathbb{Z}, \leq)$ bir tam sıralı bir kümedir.

İspat: $[a,b], [c,d], [e,f] \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) yansıma özelliği:

$\forall [a,b] \in \mathbb{Z}$ için $a+b \leq b+a$ olduğundan $[a,b] \leq [a,b]$

ii) ters simetri özelliği:

$[a,b] \leq [c,d] \quad \wedge \quad [c,d] \leq [a,b]$

$\Rightarrow a+d \leq b+c \quad \wedge \quad c+b \leq d+a$

$\Rightarrow [a,b] = [c,d]$

iii) geçişme özelliği

$[a,b] \leq [c,d] \quad \wedge \quad [c,d] \leq [e,f]$

$\Rightarrow a+d \leq b+c \quad \wedge \quad c+f \leq d+e$

$\Rightarrow a+d+f \leq b+c+f \quad \wedge \quad b+c+f \leq d+e+b$

$\Rightarrow a+d+f \leq d+e+b$

$\Rightarrow a+f+d \leq e+b+d$

$\Rightarrow a+f \leq e+b$

$\Rightarrow a+f \leq b+e \Rightarrow [a,b] \leq [e,f]$

Karsılaştırmak için;

$a+d,\ b+c \in \mathbb{N}$ olsun. $a+d \leq b+c \vee b+c < a+d$

$\Rightarrow [a,b] \leq [c,d] \vee [a,b] > [c,d]$

$\therefore (\mathbb{Z}, \leq)$ tam sıralıdır

Önerme: $(\mathbb{Z}, \leq)$ bir iyi sıralı küme değildir.

İspat: İyi sıralı küme her alt kümesinin bir en küçük elemanı olan kümeye denir.

$X = \{[0,n] : n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{Z}$ olup $EKA(X)$ yoktur.

Dolayısıyla $\mathbb{Z}$ iyi sıralı değildir.

Önerme: $\forall a \in \mathbb{N}$ için $f(a) = [a,0]$ ile tanımlı $f: \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{Z}$ fonksiyonu 1-1 dir

$f(a) = f(b) \Longrightarrow [a,0] = [b,0] \Longrightarrow a = b$

$$\mathbb{N} \cong f(\mathbb{N})$$

Dolayısıyla $[a,0]=a$ alınırsa $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Z}$ olacaktır. Bunun sonucunda doğal sayılar genişletilmiş olacaktır.

Tanım: $\forall a,b \in \mathbb{N}$ için $[a,b] = [a,0] \oplus [0,b]$
$$= [a,0] - [b,0]$$

olduğuna göre

$$[a,b] = \begin{cases} [a,0]-[b,0] = a-b, & a>b \text{ ise} \\ -[b,a] = -(b-a), & a<b \text{ ise} \\ 0, & a=b \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde ifade edilsin. Ayrıca $\oplus$ yerine $+$, $\odot$ yerine $\cdot$ alalım.

Örnek: $[7,3] = 7-3 = 4$ $\qquad$ $[3,3]=0$

$[3,7] = -4$

NOT: Bütün bunların doğrultusunda

$$\mathbb{Z} = \{0, \mp 1, \mp 2, \ldots, \mp m, \ldots\}$$

şeklindedir

NOT: $\forall m, n, k \in \mathbb{Z}$ için

i) $m+n = n+m$ i)' $mn = nm$

ii) $m+(n+k) = (m+n)+k$ ii)' $m(nk) = (mn)k$

iii) $m+0 = m$ iii)' $m.1 = m$

iv) $\exists -m \in \mathbb{Z} \ni m+(-m) = m-m = 0$

v) $m(n+k) = mn+mk$ iv)' $m.0 = 0$

Önerme: $\mathbb{Z}_+$ ile $\mathbb{N}$ arasında toplama, çarpma ve sıralamayı koruyan 1-1, örten bir fonksiyon vardır.

$$f : \mathbb{Z}_+ \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$P_+ = [m+p, m] \longmapsto f(P_+) = P$$

tanımlanarak istenilen elde edilir.

Tam Sayılarda Bölünebilme

Tanım: $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$n \mid m \iff \exists p \in \mathbb{Z} \ni m = n \cdot p$$

Bu durumda n, m yi <u>böler</u> denir.

NOT: $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $n \mid 0$ dır.

Özellikler

1) $\forall n \in \mathbb{Z}$ için $\mp 1 \mid n$ ve $\mp n \mid n$ dir.

$$n = 1 \cdot n \Rightarrow 1 \mid n \qquad n = n \cdot 1 \Rightarrow n \mid n$$

$$n = (-1)(-n) \Rightarrow -1 \mid n \qquad n = (-n)(-1) \Rightarrow -n \mid n$$

2) $n \in \mathbb{Z}$, $n \mid \mp 1 \Rightarrow n = \mp 1$ dir.

$$n \mid \mp 1 \Rightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ni \mp 1 = n \cdot q$$

$$\Rightarrow |\mp 1| = |n \cdot q|$$

$\Rightarrow 1 = |n| \cdot |q|$

$\Rightarrow |n| = 1 \quad , \quad |q| = 1$

$\Rightarrow n = \mp 1 \quad , \quad q = \mp 1$

Tanım: $n \in \mathbb{Z}$ için ∓ 1 ve $\mp n$ den farklı bölenlerine (varsa) n nin <u>has (öz) bölenleri</u> denir. ∓ 1 ve $\mp n$ ye n nin <u>aşikar bölenleri</u> denir.

Tanım: Her tam sayıyı bölen tam sayıya <u>aritmetik birim</u> denir.

$\mathbb{Z}$ nin aritmetik birimleri: 1 ile -1 dir.

3) $m, n, p \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\left.\begin{array}{c} m \mid n \\ \text{ve} \\ n \mid p \end{array}\right\} \Rightarrow m \mid p \text{ dir.}$$

$m \mid n \Rightarrow \exists k \in \mathbb{Z} \ni n = mk$

$n \mid p \Rightarrow \exists t \in \mathbb{Z} \ni p = nt$

$\Rightarrow \exists\, k,t \in \mathbb{Z} \ni p = (mt)k = m(tk)$

$\Rightarrow \exists\, r = tk \in \mathbb{Z} \ni p = mr$

$\Rightarrow m|p$

Tanım: $a,b \in \mathbb{Z}$ için $a|b$ ve $b|a$ ise a ile b ye ilgilidirler denir. $a \approx b$ ile gösterilir.

Önerme: a ve b tam sayılarının ilgili olması için gerek ve yeter koşul $a = \mp b$ olmasıdır.

4) $m,n,p \in \mathbb{Z}$ olsun.

$m|n$ ve $m|p \Longrightarrow \forall\, x,y \in \mathbb{Z}$ için $m \mid xn + yp$

$m|n \Rightarrow \exists\, k \in \mathbb{Z} \ni n = mk$

$m|p \Rightarrow \exists\, t \in \mathbb{Z} \ni p = mt$

$\forall x, y \in \mathbb{Z}$ için $xn + yp = x(mk) + y(mt)$
$= m(xk + yt)$

$\Rightarrow m \mid xn + yp$

5) $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $m \mid n \Longrightarrow |m| \leq |n|$ dir

$m \mid n \Longrightarrow \exists q \in \mathbb{Z} \ni n = mq$

$n \neq 0$ olduğundan $m \neq 0$, $q \neq 0$ olur

$\Rightarrow |q| \geq 1$

$n = mq \Rightarrow |n| = |mq| \Longrightarrow |n| = |m| \cdot |q| \geq |m|$

$\Rightarrow |m| \leq |n|$

Tanım: $p > 1$, $p \in \mathbb{Z}$ olsun. p nin 1 ve p den başka pozitif böleni yoksa p ye <u>asal sayı</u> denir

Önerme: Sıfırdan ve aritmetik birimlerden farklı her tam sayının en az bir asal böleni vardır.

Önerme: Sonsuz sayıda asal sayı vardır.

İspat: Asal sayılar sonlu ve $\underline{P} = \{p_1, p_2, \ldots, p_n\}$ olsun.

$a = p_1 p_2 \cdots p_n + 1$ tam sayısı 1 den büyük olduğundan en az bir p asal böleni vardır.

$\underline{P}$ asal sayılar kümesi olduğundan $p \in \underline{P}$ dir.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow p \mid p_1 \cdots p_n \\ p \mid a \end{array}\right\} \Rightarrow p \mid a - p_1 . p_2 \cdots p_n$$

$$\Rightarrow p \mid 1$$

$$\Rightarrow p = \mp 1 \quad (\text{Çelişki } p \text{ asal idi})$$

$\therefore$ Sonsuz tane asal sayı vardır.

Tanım: $m \neq 0$, $n \neq 0$, $m, n \in \mathbb{Z}$ olsun.

i) $d \mid m$, $d \mid n$ olacak şekilde $d > 0$ tamsayısı varsa d ye m ve n nin bir ortak böleni denir.

ii) d, m ve n nin bir ortak böleni olsun. Eğer m ve n nin her e ortak böleni için $e|d$ oluyorsa d, m ve n nin bir <u>en büyük ortak böleni</u> denir ve $d=(m,n)$ ile gösterilir.

Teorem: $m\neq 0$, $n\neq 0$, $m,n\in\mathbb{Z}$ olsun. m ve n nin en büyük ortak böleni vardır.

$$(m,n)=d \Rightarrow d=mx+ny$$ olacak şekilde $x,y\in\mathbb{Z}$ vardır.

Tanım: $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, $n\neq 0$ için $(m,n)=1$ ise bu iki sayı <u>aralarında asaldır</u> denir.

m ve n aralarında asal ise 1 den başka ortak böleni yoktur.

Önerme: p asal sayı, $a\neq 0$, $a\in\mathbb{Z}$ olsun.

$$(a,p)=1 \Longleftrightarrow p\nmid a$$

İspat: ($\Rightarrow$:) p asal sayı olduğundan bölenleri 1 ve p dir.

$(a,p)=1 \Longrightarrow p \nmid a$ dır.

($\Leftarrow$:) $p \nmid a$ olsun. Bu durumda p ile a nın ortak bölenleri ancak 1 olabilir. O halde $(a,p)=1$ dir.

Uyarı: $m,n,d \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$(m,n)=d \Longrightarrow \exists\, x,y \in \mathbb{Z} \ni mx+ny=d$$
$$\not\Longleftarrow$$

$d \neq 1$ için tersi geçerli değildir.

Yani $mx+ny=1 \Longleftrightarrow (m,n)=1$

Teorem: $m,n \in \mathbb{Z}$, $m \neq 0$, $n \neq 0$ ve $c \in \mathbb{Z}$ olsun.

$$\left.\begin{array}{l} m \mid n.c \\ (m,n)=1 \end{array}\right\} \Longrightarrow m \mid c$$

dır.

İspat: $(m,n)=1 \Longrightarrow \exists x,y\in\mathbb{Z} \ni mx+ny=1$

$m|nc \Longrightarrow \exists k\in\mathbb{Z} \ni nc=mk$

$$1=mx+ny \Longrightarrow c = c(mx)+c(ny)$$
$$= c(mx)+(cn)y$$
$$= c(mx)+(mk)y$$
$$= m(cx+ky)$$
$$\Longrightarrow m|c$$

Tanım: $m,n\in\mathbb{Z}$, $m\neq 0$, $n\neq 0$ olsun

i) $m|k$ ve $n|k$ olan $k>0$ tam sayısına m ile n nin bir ortak katı denir.

ii) k, m ile n nin bir ortak katı olsun. m ile n nin her t ortak katı için $k|t$ ise k ya m ile n nin <u>en küçük ortak katı</u> denir. $[m,n]$ ile gösterilir.

Önerme: $a,b\in\mathbb{Z}_+$ olmak üzere a ve b nin okek'i vardır ve $[a,b].(a,b)=a.b$ dir.

ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Soyut Matematik

Teşekkürler

Dr. Öğr. Gör. Abdullah DERTLİ