



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi

Fen Edebiyat Fakültesi

Matematik Bölümü

Dijital Ders Platformu

Analiz II

Kısmi İntegrasyon
Trigonometrik İntegraller
İndirgeme Bağıntıları

Prof. Dr. İlker ERİLMİZ

Ders 8

5.3. KİSMİ İNTEGRASYON

2

$u=u(x)$, $v=v(x)$ Tü türevlenebilir fonksiyon olmak üzere $u \cdot v$ fonksiyonunun diferansiyeli

$$d(u \cdot v) = du \cdot v + u \cdot dv = u'(x) \cdot v(x) dx + u(x) \cdot v'(x) \cdot dx$$

İdi. Buradan her iki tarafın integrali alırsa

$$\int d(u \cdot v) = \int du \cdot v + \int u \cdot dv \Rightarrow$$

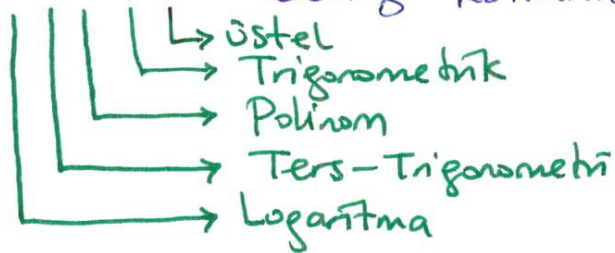
$$\boxed{\int u \cdot dv = u \cdot v - \int v \cdot du}$$

elde edilir. Buna kısmi integral formülü denir.

* Kısmi integralde integranttaki bir fonksiyon u alırsa, geriye kalanlar $dx, dt, \dots$ ile beraber dv seçilir. $u \xrightarrow{\text{türev}} du$, $dv \xrightarrow{\text{int.}} v$ kullanılır.

* Farklı türden fonksiyonlar çarpım durumunda ise, Ters-trigonometrik veya logaritma fonksiyonları integralde yalnız ise kısmi integral uygulanır.

* Kısmi integral yapılacağı zaman u fonksiyonun seçiminde LAPTÜ önceliği kullanılabilir.



ÖR: $J = \int (x+1) \cdot e^x \cdot dx = ?$ $u = x+1$, $du = e^x \cdot dx$

alınrsa $du = 1 \cdot dx$ ve $\int du = \int e^x \cdot dx \Rightarrow u = e^x$

olup

$$J = \int u \cdot du = \int (x+1) \cdot e^x \cdot dx = (x+1) \cdot e^x - \int e^x \cdot dx$$

$$= (x+1) \cdot e^x - e^x + c \text{ bulunur.}$$

ÖR: $I = \int x \cdot \cos 2x \cdot dx = ?$ $u = x$, $dv = \cos 2x \cdot dx$ ise
 $du = dx$, $v = \frac{\sin 2x}{2}$ olur. Buradan

$$I = x \cdot \frac{\sin 2x}{2} - \int \frac{\sin 2x}{2} \cdot dx = \frac{x \cdot \sin 2x}{2} + \frac{\cos 2x}{4} + c$$

ÖR: $S = \int \ln x \cdot dx = ?$

$u = \ln x$, $dv = dx$ alırsa $du = \frac{1}{x} dx$, $v = x$ olup
 $S = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx = x \cdot \ln x - x + c$ olur.

ÖR: $J = \int \arcsin x \cdot dx = ?$ $u = \arcsin x$, $dv = dx$ ile
 $J = x \cdot \arcsin x - \int x \cdot \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$ $\downarrow$ $du = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx$, $\downarrow$ $v = x$

$$= x \cdot \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + c \text{ olur.}$$

ÖR: $M = \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = ?$ $u = \ln^2 x$, $x^3 \cdot dx = dv$ alınrsa

$\downarrow$ $\downarrow$
 $du = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$ $v = \frac{x^4}{4}$

$$M = \int x^3 \cdot \ln^2 x \cdot dx = \frac{x^4 \cdot \ln^2 x}{4} - \int \frac{x^4}{4} \cdot 2 \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot dx$$

$$= \frac{x^4 \cdot \ln^2 x}{4} - \int \frac{x^3 \cdot \ln x}{2} \cdot dx$$

Buna tekrar kısmi integral uygulanırsa

$\ln x = u$ $\frac{x^3}{2} dx = dv$

$$= \frac{x^4 \cdot \ln^2 x}{4} - \left[\ln x \cdot \frac{x^4}{8} - \int \frac{x^4}{8} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \right]$$

$$= \frac{x^4 \cdot \ln^2 x}{4} - \frac{x^4}{8} \ln x + \frac{x^4}{32} + c \text{ olur.}$$

ÖR: $J = \int e^x \cdot \sin x \cdot dx = ?$

$u = \sin x$, $dv = e^x \cdot dx$ alınırsa
 $du = \cos x \cdot dx$, $v = e^x$ olup

$$J = e^x \cdot \sin x - \int e^x \cdot \cos x \cdot dx$$

Tekrar kısmi integral uygulanırsa

$$u = \cos x, \quad e^x \cdot dx = dv \text{ alırsa} \quad du = -\sin x \cdot dx, \quad v = e^x \text{ ile}$$

$$J = e^x \cdot \sin x - \left[\cos x \cdot e^x - \int e^x \cdot (-\sin x) \cdot dx \right]$$

$$J = e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x - \underbrace{\int e^x \cdot \sin x \cdot dx}_J \Rightarrow$$

$$2J = e^x (\sin x - \cos x) \Rightarrow J = \frac{e^x}{2} (\sin x - \cos x) + c \text{ dir.}$$

NOT: $\int u \cdot dv$ integralinde u fonk. nun türevlesi alındığında azalıp sıfıra gidiyorsa kısmî integral tablosu da kullanılabilir.

ÖR: $S = \int (x^3 + 1) \cdot e^x \cdot dx = ?$

Kısmî integral uygulamak yerine tablo ile çözelim:

$u(x)$	$du(x)$
x^3+1	$+ e^x$
$3x^2$	$- e^x$
$6x$	$+ e^x$
6	$- e^x$
0	$+ e^x$

Türev (left arrow) integral (right arrow)

$$S = (x^3+1) \cdot e^x - 3x^2 e^x + 6x \cdot e^x - 6e^x + c$$

bulunur.

$$\text{QR: } \int (x^2-2) \cdot \sin(3x+1) \cdot dx = K = ?$$

$$K = \int (x^2-2) \cdot \sin(3x+1) \cdot dx =$$

$$= -(x^2-2) \cdot \frac{1}{3} \cos(3x+1) +$$

$$+ 2x \cdot \sin(3x+1) \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{27} \cos(3x+1) + C$$

olur.

$u(x)$	$v(x)$
x^2-2	$\sin(3x+1)$
$2x$	$-\cos(3x+1) \cdot \frac{1}{3}$
2	$-\sin(3x+1) \cdot \frac{1}{9}$
	$\cos(3x+1) \cdot \frac{1}{27}$

T (left arrow) i (right arrow)

5.4. TRİGONOMETRİK İNTEGRALLER

Trigonometrik fonksiyonların kuvvetleri olması ve çarpım durumunda olması halinde yapılacaklar örnekleriyle verilecektir. Aşağıdaki özdeşlikler sık sık kullanılacaktır:

$$\frac{1 - \cos 2t}{2} = \sin^2 t, \quad \frac{1 + \cos 2t}{2} = \cos^2 t$$

$$1 + \tan^2 t = \sec^2 t, \quad 1 + \cot^2 t = \operatorname{cosec}^2 t$$

$$\underline{\text{ÖR:}} \int \cot^2 5x \cdot dx = \int [\operatorname{cosec}^2 5x - 1] dx = \frac{-\cot 5x}{5} - x + c$$

$$\underline{\text{ÖR:}} \int \tan^2 3x \cdot dx = \int (\sec^2 3x - 1) dx = \frac{\tan 3x}{3} - x + c$$

$$\underline{\text{ÖR:}} \int \sec x \cdot dx = \int \frac{\sec x (\tan x + \sec x)}{\tan x + \sec x} dx = \ln |\tan x + \sec x| + c$$

$\int \sin^m x \cdot \cos^n x \cdot dx$ ($m, n \in \mathbb{N}$) integralleri:

Bu integrallerde m ve n sayılarına göre değişken değişimi yapılır:

- (i) m ve n tek ise istenilen herhangi bir fonksiyona değişken değişimi yapılabilir
- (ii) m ve n sayılarından birisi tek, diğeri çift ise kuvveti çift olana deg. değişimi yapılır
- (iii) Her ikisinde çift ise yarım açı formülleriyle mertebe düşürülür.

ÖR: $J = \int \sin^4 x \cdot \cos^3 x \cdot dx$ için $\sin x = u$ alınırsa
 $\cos x \cdot dx = du$ olup

$$J = \int \sin^4 x \cdot \cos^2 x \cdot \cos x \cdot dx = \int \sin^4 x \cdot (1 - \sin^2 x) \cdot \cos x \cdot dx$$

$$= \int u^4 (1 - u^2) \cdot du = \frac{u^5}{5} - \frac{u^7}{7} = \frac{\sin^5 x}{5} - \frac{\sin^7 x}{7} + c.$$

ÖR: $I = \int \sin^6 x \cdot dx = ?$ Her Thi kuvvet de çift oldu dan

$$I = \int (\sin^2 x)^3 dx = \int \left(\frac{1 - \cos 2x}{2} \right)^3 dx = \frac{1}{8} \int (1 - 3\cos 2x + 3\cos^2 2x - \cos^3 2x)$$

$$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3\sin 2x}{2} + 3 \int \cos^2 2x \cdot dx - \int \cos^3 2x \cdot dx \right]$$

$$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3\sin 2x}{2} + 3 \int \frac{1 + \cos 4x}{2} dx - \int \cos 2x \cdot \cos^2 2x \cdot dx \right]$$

↑ Sin 2x-in kuvveti 0

$$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3\sin 2x}{2} + \frac{3}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \int \frac{du}{2} \cdot (1 - u^2) \right]$$

↘ u = sin 2x
alınca

$$= \frac{1}{8} \left[x - \frac{3\sin 2x}{2} + \frac{3}{2} \left(x + \frac{\sin 4x}{4} \right) - \frac{1}{2} \left(\sin 2x - \frac{\sin^3 2x}{3} \right) \right] + C$$

bulunur.

ÖR: $\int \sin^5 x \cdot \cos^5 x \cdot dx = M = ?$ Kuvetler tek old. dan
 $\sin x = u$ alırsa $\cos x \cdot dx = du$ olup

$$M = \int \sin^5 x \cdot (\cos^2 x)^2 \cdot \cos x \cdot dx = \int u^5 \cdot (1-u^2)^2 \cdot du$$

$$= \int u^5 (1 - 2u^2 + u^4) du = \frac{u^{10}}{10} - \frac{2u^8}{8} + \frac{u^6}{6}$$

$$= \frac{\sin^{10} x}{10} - \frac{\sin^8 x}{4} + \frac{\sin^6 x}{6} + c$$

$\int \sin ax \cdot \sin bx \cdot dx$, $\int \sin ax \cdot \cos bx \cdot dx$ ve $\int \cos ax \cdot \cos bx \cdot dx$
 Bu integrallerde ters-dönüşüm formülleri kullanılır:

$$\begin{aligned} \text{ÖR: } J &= \int \sin 3x \cdot \cos 5x \cdot dx = \int \frac{1}{2} [\sin(3x+5x) + \sin(3x-5x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\sin 8x - \sin 2x) dx = \frac{1}{2} \left[-\frac{\cos 8x}{8} + \frac{\cos 2x}{2} \right] + c \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Q.2: } S &= \int \cos 5x \cdot \cos 7x \cdot dx = \frac{1}{2} \int [\cos(5x-7x) + \cos(5x+7x)] dx \\ &= \frac{1}{2} \int (\cos 2x + \cos 12x) dx = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 12x}{12} \right) + C\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{Q.3: } M &= \int \sin x \cdot \sin 2x \cdot \sin 5x \cdot dx \\ &= \int \sin x \cdot \left[\frac{1}{2} (\cos(2x-5x) - \cos(2x+5x)) \right] dx \\ &= \int \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos 3x \cdot dx - \int \frac{1}{2} \sin x \cdot \cos 7x \cdot dx \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} [\sin 4x - \sin 2x] dx - \frac{1}{2} \int \frac{1}{2} [\sin 8x - \sin 6x] dx \\ &= \frac{1}{4} \left[\frac{-\cos 4x}{4} + \frac{\cos 2x}{2} + \frac{\cos 8x}{8} - \frac{\cos 6x}{6} \right] + C \text{ plus.}\end{aligned}$$

$\int R(\sin x, \cos x) dx$ integrallesi:

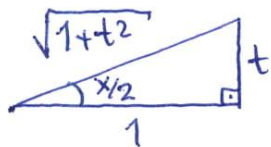
$\sin x, \cos x$ fonksiyonlarının oluşturduğu Rasyonel fonksiyonlarda aşağıdaki yol izlenir: $R(\sin x, \cos x)$ integrantında

$$R(-\sin x, \cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ ise } u = \cos x$$

$$R(\sin x, -\cos x) = -R(\sin x, \cos x) \text{ ise } u = \sin x$$

$$R(-\sin x, -\cos x) = R(\sin x, \cos x) \text{ ise } u = \tan x$$

dönüşümü uygulanır. Eğer integral bunların hiç birisine uymazsa $\tan \frac{x}{2} = t$ dönüşümü uygulanır. Buna göre



$$\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2} = \frac{2t}{1+t^2}$$

$$\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1 = \frac{1-t^2}{1+t^2}$$

$$\text{ve } dx = \frac{2}{1+t^2} dt \text{ yazılır.}$$

QR: $\int \sec^4 x \cdot \tan^3 x \cdot dx = J = ?$

$$J = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^7 x} dx \Rightarrow R(\sin x, \cos x) = R(-\sin x, -\cos x) \text{ olup}$$

$\tan x = t$ alırsa $\sec^2 x \cdot dx = dt$ olup $J = \int \sec^2 x \cdot \sec^2 x \cdot \tan^3 x \cdot dx$

$$J = \int (1 + \tan^2 x) \cdot \sec^2 x \cdot \tan^3 x \cdot dx$$

$$= \int (1 + t^2) \cdot t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} + \frac{t^6}{6} = \frac{\tan^4 x}{4} + \frac{\tan^6 x}{6} + C$$

olur.

QR: $M = \int \sec x \cdot \tan^3 x \cdot dx = \int \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x} \cdot dx$ olup $\cos x = u$
alırsa $-\sin x \cdot dx = du$ ile

$$M = \int \frac{\sin^2 x \cdot \sin x \cdot dx}{\cos^4 x} = \int \frac{(1 - u^2) \cdot -du}{u^4} = \int (u^{-2} - u^{-4}) du$$

$$= -(\cos x)^{-1} + \frac{1}{3} (\cos x)^{-3} + C \text{ olur.}$$

OR: $I = \int \tan^4 x \cdot dx = ?$ $I = \int \frac{\sin^4 x}{\cos^4 x} dx$ old. dan $\tan x = u$

alimur sa $\sec^2 x \cdot dx = du$ dup $I = \int \tan^2 x \cdot \tan^2 x \cdot dx \Rightarrow$
 $I = \int (\sec^2 x - 1) \cdot \tan^2 x \cdot dx = \int \sec^2 x \cdot \tan^2 x \cdot dx - \int \tan^2 x \cdot dx$
 $= \int u^2 \cdot du - \int (\sec^2 x - 1) dx$
 $= \frac{\tan^3 x}{3} - \tan x + x + c$ olus.

5.5. İNDİRGEME BAĞINTILARI :

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $I_n = \int f^n(x) \cdot dx$ şeklinde verilen integralin daha düşük dereceli integraller cinsinden yazılmasına indirgeme bağıntısı denir. Bunlar yapılırken çoğunlukla kısmi integral uygulanırken değişken değişiminde bazen kullanılabilir.

ÖR: $J_n = \int \cos^n x \cdot dx$ integrali için bir indirgeme bağıntısı bulalım.

$$J_0 = \int 1 \cdot dx = x, \quad J_1 = \int \cos x \cdot dx = \sin x \quad \text{olup } n \geq 2 \text{ için}$$

$$J_n = \int \cos^n x \cdot dx = \int \cos^{n-1} x \cdot \cos x \cdot dx \quad \text{İçin } \cos^{n-1} x = u$$

$$\cos x \cdot dx = du \text{ ile}$$

$$J_n = \sin x \cdot \cos^{n-1} x - \int \sin x \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot (-\sin x) \cdot dx$$

$$\begin{aligned}
 J_n &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \int \sin^2 x \cdot (n-1) \cos^{n-2} x \cdot dx \\
 &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + \int (1 - \cos^2 x) \cdot (n-1) \cdot \cos^{n-2} x \cdot dx \\
 &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \int \cos^{n-2} x \cdot dx - (n-1) \int \cos^n x \cdot dx \\
 &= \sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \cdot J_{n-2} - (n-1) \cdot J_n \Rightarrow
 \end{aligned}$$

$$J_n = \frac{1}{n} \left[\sin x \cdot \cos^{n-1} x + (n-1) \cdot J_{n-2} \right] \text{ olur. Buna göre}$$

$$J_6 = \int \cos^6 x \cdot dx = \frac{1}{6} \left[\sin x \cdot \cos^5 x + 5 \cdot J_4 \right]$$

$$J_4 = \frac{1}{4} \left[\sin x \cdot \cos^3 x + 3 J_2 \right]$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[\sin x \cdot \cos x + x \right]$$

yerlerine yazarak J_6 kolayca bulunabilir.

ÖR: $S_n = \int (\ln x)^n \cdot dx$ için indirgeme bağ. bulalım.

$S_0 = x$, $S_1 = x \ln x - x$ olup $n \geq 2$ için $\begin{cases} u = (\ln x)^n \\ dv = dx \end{cases}$ alınırsa

$$S_n = x \cdot (\ln x)^n - \int x \cdot n \cdot (\ln x)^{n-1} \cdot \frac{1}{x} \cdot dx \Rightarrow$$

$S_n = x \cdot (\ln x)^n - n \cdot S_{n-1}$ bulunur. Buna göre

$$\begin{aligned} S_7 &= \int (\ln x)^7 \cdot dx = x \cdot \ln^7 x - 7 \cdot S_6 \\ &= x \cdot \ln^7 x - 7 \cdot [x \cdot \ln^6 x - 6 \cdot S_5] \\ &= x \cdot \ln^7 x - 7x \cdot \ln^6 x - 6(x \cdot \ln^5 x - 5 \cdot S_4) \end{aligned}$$

! şeklinde yazılıp sonuç bulunur.

ÖR: $I_n = \int \sec^n x \cdot dx$ için $I_0 = x$, $I_1 = \ln |\tan x + \sec x|$,

$I_2 = \tan x$ olup $n \geq 3$ için

$$I_n = \int \sec^n x \cdot dx = \int \underbrace{\sec^{n-2} x}_u \cdot \underbrace{\sec^2 x \cdot dx}_{dv} \Rightarrow$$

$$I_n = \sec^{n-2} x \cdot \tan x - \int \tan x \cdot (n-2) \cdot \sec^{n-3} x \cdot \sec x \cdot \tan x \cdot dx$$

$$I_n = \sec^{n-2} x \cdot \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \cdot (n-2) \cdot \sec^{n-2} x \cdot dx$$

$$I_n = \sec^{n-2} x \cdot \tan x - (n-2) \cdot I_n + (n-2) \cdot I_{n-2} \Rightarrow$$

$$I_n = \frac{1}{n-1} \left[\sec^{n-2} x \cdot \tan x + (n-2) \cdot I_{n-2} \right] \text{ bulunur.}$$

ÖR: $I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx$ için indirgeme bağıntısı bulalım.

$I_0 = x$, $I_1 = \arctan x$ olup $n \geq 2$ için

$$I_n = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx = \int \frac{1}{(1+x^2)^n} dx \text{ integrali için } dx = dv \text{ ve}$$

$$u = \frac{1}{(1+x^2)^n} \text{ alırsa } du = \frac{-n \cdot 2x}{(1+x^2)^{n+1}} dx \text{ ve } v = x \text{ olup}$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} - \int \frac{-n \cdot 2x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}} dx$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n \left[\int \frac{x^2+1}{(1+x^2)^{n+1}} dx - \int \frac{1}{(1+x^2)^{n+1}} dx \right]$$

$$I_n = \frac{x}{(1+x^2)^n} + 2n (I_n - I_{n+1}) \Rightarrow$$

$$\underline{I_{n+1} = \frac{1}{2n} \left[\frac{x}{(1+x^2)^n} + (2n-1) \cdot I_n \right] \text{ bulunur.}}$$



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



21

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 8