



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II
İntegral ve Uygulamaları

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 7

5. INTEGRAL VE UYGULAMALARI:

Bu bölümde kabaca türev alma işleminin tersi olarak da düşünülebilecek olan integral alma işlemi ve yöntemleri verilecektir.

5.1. Belirsiz integral ve özellikleri:

$y = f(x)$ şeklinde verilen f fonksiyonunun $x \in D_f$ için diferansiyelini $dy = f'(x) \cdot dx$ şeklinde verilmiş x noktasında türevi $f'(x)$ olan fonksiyonlar $C \in \mathbb{R}$ olmak üzere $f(x) + C$ fonksiyonlarıdır.

f' 'nin tanım kümesindeki her x için $F'(x) = f'(x)$ oluyorsa $F(x)$ -e f' 'nin ilkel fonksiyonu denir ve $f'(x)$ -in tüm ilkel fonksiyonlarının kümesine f' 'nin belirsiz integrali denir ve

$$\int f'(x) dx \quad \text{ile gösterilir.}$$

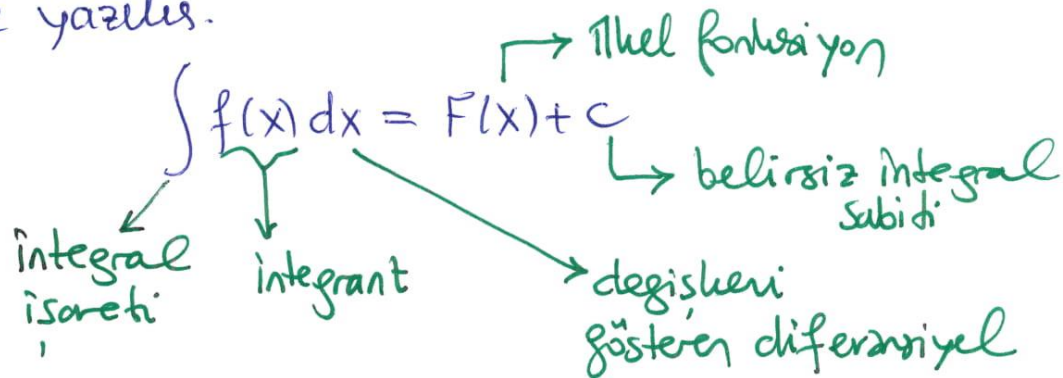
Örneğin $f(x) = 3x^2$ için ilkel fonksiyonlar kümesi

$$\int 3x^2 \cdot dx = \{ x^3, x^3+1, x^3-\pi, x^3-\sqrt{3}, \dots \}$$

şeklinde dir. Herhangi iki ilkel fonksiyonun farkı bir sabit olup tüm ilkel fonksiyonları yazmak yerine $F'(x) = f(x)$ olmak üzere

$$\int f(x) dx = F(x) + c$$

şeklinde yazılır.



Belirsiz integral ile ilgili olarak;

$$1) \left(\int f(x) dx \right)' = f(x) \text{ veya } \frac{d}{dx} \left[\int f(x) dx \right] = f(x)$$

$$2) \int f'(x) dx = f(x) + c$$

$$3) \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$4) \int (\alpha \cdot f)(x) \cdot dx = \alpha \cdot \int f(x) dx, \alpha \in \mathbb{R}$$

$$5) \forall x \in I \subset \mathbb{R} \text{ için } F'(x) = f(x) \text{ ise}$$

$$\int f(ax+b) \cdot dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + c$$

İfadelesi kolayca gösterilebilir.

* Integral türevin tam olarak tersi değildir. Mesela $(\sin x + \pi)' = \cos x$ iken $\int \cos x \cdot dx = \sin x + c$ 'dir.

Elementer Fonksiyonların Belirsiz İntegrali:

$$1) \int x^{\alpha} \cdot dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c \quad (\alpha \neq -1) \quad 9) \int \sinh x \cdot dx = \cosh x + c$$

$$2) \int \frac{dx}{x} = \ln|x| + c$$

$$10) \int \cosh x \cdot dx = \sinh x + c$$

$$3) \int a^x \cdot dx = \frac{a^x}{\ln a} + c$$

$$11) \int \sec^2 x \cdot dx = \tanh x + c$$

$$4) \int e^x \cdot dx = e^x + c$$

$$12) \int \operatorname{Cosech}^2 x \cdot dx = -\coth x + c$$

$$5) \int \sinh x \cdot dx = -\cosh x + c$$

$$13) \int \frac{1}{1+x^2} dx = \arctan x + c$$

$$6) \int \cosh x \cdot dx = \sinh x + c$$

$$14) \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x + c$$

$$7) \int \sec^2 x \cdot dx = \tan x + c$$

$$15) \int \frac{1}{1-x^2} dx = \ln \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + c$$

$$8) \int \operatorname{Cosec}^2 x \cdot dx = -\cot x + c$$

$$16) \int \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} dx = \ln(x + \sqrt{1+x^2}) + c$$

$$20) \int \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} dx = \operatorname{arosec} x + c$$

$$17) \int \frac{1}{\sqrt{x^2-1}} dx = \ln(x + \sqrt{x^2-1}) + c$$

$$21) \int \sec x dx = \ln|\tan x + \sec x| + c$$

$$18) \int \sec x \cdot \tan x \cdot dx = \sec x + c$$

$$22) \int \operatorname{cosec} x dx = \ln|\cot x - \operatorname{cosec} x| + c$$

$$19) \int \operatorname{cosec} x \cdot \cot x \cdot dx = -\operatorname{cosec} x + c$$

OR: $\int \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \int x^{-1/2} \cdot dx = \frac{x^{1/2}}{1/2} + c = 2\sqrt{x} + c$

$$\int \frac{2x^4 - 5x\sqrt[4]{x} + 3}{x^2} dx = \int (2x^2 - 5x^{-3/4} + 3x^{-2}) dx$$

$$= \frac{2x^3}{3} - 5 \cdot \frac{x^{1/4}}{\frac{1}{4}} + 3 \frac{x^{-1}}{-1} + c$$

$$= \frac{2x^3}{3} - 20\sqrt[4]{x} - \frac{3}{x} + c$$

ÖR: $\int \frac{1}{2} (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} \int (1 - \cos x) dx = \frac{1}{2} (x - \sin x) + c$

$$\begin{aligned} \int (3^x + 5^x)^2 dx &= \int (3^{2x} + 2 \cdot 15^x + 5^{2x}) dx \\ &= \frac{9^x}{\ln 9} + 2 \cdot \frac{15^x}{\ln 15} + \frac{5^{2x}}{\ln 25} + c \end{aligned}$$

5.2. Değişken değiştirme Yöntemi:

Zor ve karmaşık integrali daha kolay veya elementer fonksiyonların integrallerine dönüştürmek için bileşke fonk. yapısından faydalanılır.

$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \cdot dx$ integralinde $g(x) = u$ alınıp her iki tarafın diferansiyeli alırsa $g'(x) \cdot dx = 1 \cdot du$ ile

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int f(u) \cdot du$$

olur.

UYARI: Değişken değiştirme yapıldığında yeni integralde eski değişken kalmamalıdır. Integral çözüldükten sonra ters dönüşümle cevap ilk değişken cinsinden yazılmalıdır.

ÖR:

$$I = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{dx}{x} = ? \quad \ln x = t \text{ alırsa } \frac{1}{x} dx = 1 \cdot dt \text{ olup}$$

$$I = \int (\ln x)^3 \cdot \frac{dx}{x} = \int t^3 \cdot dt = \frac{t^4}{4} = \frac{(\ln x)^4}{4} + c$$

ÖR: $\int \sin(5x+3) \cdot dx = J = ?$

$5x+3 = u$ alırsa $5 \cdot dx = du \Rightarrow dx = \frac{du}{5}$ olur. Buradan

$$J = \int \sin(5x+3) dx = \int \sin u \cdot \frac{du}{5} = \frac{1}{5} \int \sin u \cdot du = -\frac{\cos u}{5}$$

$$= -\frac{\cos(5x+3)}{5} + c \text{ olur.}$$

ÖR: $S = \int (3x-1)^{24} \cdot dx = ?$

$3x-1 = t$ alırsa $3 \cdot dx = dt \Rightarrow dx = \frac{dt}{3}$ olur. Buradan

$$S = \int (3x-1)^{24} \cdot dx = \int t^{24} \cdot \frac{dt}{3} = \frac{1}{3} \int t^{24} \cdot dt = \frac{t^{25}}{75}$$

$$= \frac{(3x-1)^{25}}{75} + c$$

ÖR: $I = \int \frac{t}{3+t^2} \cdot dt = ?$ $3+t^2 = u$ alırsa $2t \cdot dt = du \Rightarrow$

$t \cdot dt = \frac{du}{2}$ olur. O zaman $I = \int \frac{t \cdot dt}{3+t^2} = \int \frac{du/2}{u} = \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} \Rightarrow$

$$I = \frac{1}{2} \ln |u| = \frac{1}{2} \ln |3+t^2| + c.$$

ÖR: $J = \int \frac{\arctan^3 x}{1+x^2} \cdot dx$ için $\arctan x = u$ alırsa $\frac{1}{1+x^2} dx = du$

olup $J = \int u^3 \cdot du = \frac{u^4}{4} = \frac{\arctan^4 x}{4} + c$ olur.

ÖR: $J = \int \frac{t^5}{t^{12}+1} dt = ?$ $t^6 = u$ alırsa $6 \cdot t^5 \cdot dt = du \Rightarrow$
 $t^5 \cdot dt = \frac{du}{6}$ olup

$$J = \int \frac{du/6}{u^2+1} = \frac{1}{6} \int \frac{1}{1+u^2} du = \frac{1}{6} \arctan u = \frac{\arctan t^6}{6} + c$$

ÖR: $M = \int \frac{1}{a^2+t^2} \cdot dt = \int \frac{1}{a^2[1+(\frac{t}{a})^2]} dt = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+(\frac{t}{a})^2} dt$ ile

$\frac{t}{a} = u$ alırsa $t = a \cdot u \Rightarrow dt = a \cdot du$ ile

$$M = \frac{1}{a^2} \int \frac{1}{1+u^2} \cdot a \cdot du = \frac{1}{a} \int \frac{1}{1+u^2} \cdot du = \frac{1}{a} \arctan u$$

$$= \frac{1}{a} \arctan\left(\frac{t}{a}\right) + c.$$

ÖR: $S = \int \tan x \cdot dx = ?$

$S = \int \frac{\sin x}{\cos x} \cdot dx$ için $\cos x = u$ alırsa $-\sin x \cdot dx = du \Rightarrow$

$\sin x \cdot dx = -du$ olup $S = \int \frac{-du}{u} = -\ln|u| = -\ln|\cos x| + c.$

ÖR: $I = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} \cdot dx = ?$

$$I = \int \frac{1}{\sin x \cdot \cos x} dx = \int \frac{\frac{1}{\cos^2 x}}{\sin x \cdot \cos x \cdot \frac{1}{\cos^2 x}} \cdot dx = \int \frac{\sec^2 x}{\tan x} \cdot dx$$

$$= \int \frac{du}{u} = \ln|u| = \ln|\tan x| + c$$

ÖR: $\int \frac{1}{\sin x} dx = S = \int \frac{1}{\sin x} dx = \int \frac{1}{2 \sin \frac{x}{2} \cdot \cos \frac{x}{2}} \cdot dx$ olup

$\frac{x}{2} = t \Rightarrow x = 2t$ alınırsa
 $dx = 2 \cdot dt$ olup

$$S = \int \frac{1}{2 \sin t \cdot \cos t} \cdot 2 \cdot dt = \int \frac{1}{\sin t \cdot \cos t} dt = \ln|\tan t|$$

$$= \ln\left|\tan \frac{x}{2}\right| + c$$

bulunur.

Yukarıdaki örnekten




UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



12

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERİLMİZ

Ders 7