



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II
Grafik Çözümleri

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 6

4.7. Grafik Çizimleri

Bir fonksiyonun grafiği çizilirken aşağıdaki adımlar izlenir:

- 1) Fonksiyonun tanım kümesi D_f bulunur.
- 2) Eksenleri kestiği noktalar, periyodiklik, simetriklik gibi karakteristik özellikler bulunur.
- 3) Eğer varsa asimtotlar incelenir
- 4) Birinci türev ile fonksiyonun monotonluk aralıkları ve ekstremum noktaları bulunur.
- 5) İkinci türev bulunup bükümlük ve dönüm noktaları bulunur.
- 6) Tüm bulunanlar x , $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$ dikkate alınarak bir tabloya yerleştirilir.
- 7) Grafik çizilir.

1. ÖRNEK: $f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2}$ fonk. nun grafiğini çizelim.

3

1) $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

2) $x=0$ için $y=1$, $y=0$ için $x^2+x-2=0 \Rightarrow x=1, x=-2$.

olup $A(0,1), B(1,0), C(-2,0)$ noktalarından geçes.

Periyodik olmayıp $f(-x) \neq f(x)$, $f(-x) \neq -f(x)$ olup
ne tek ne de çifttir.

3) $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = \frac{4}{0^+} = +\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = -\infty$ olup $x=2$

düsey asimtot olur. Ayrıca

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-2} = x+3 + \frac{4}{x-2} \text{ old. dan } y=x+3 \text{ doğrusu}$$

$\mp \infty$ kollarda eğri asimtot olur.

4) $f'(x) = \frac{x^2-4x}{(x-2)^2}$ olup kritik noktalar $x=0, x=4$ ve
 $x=2 \#$ noktasıdır.

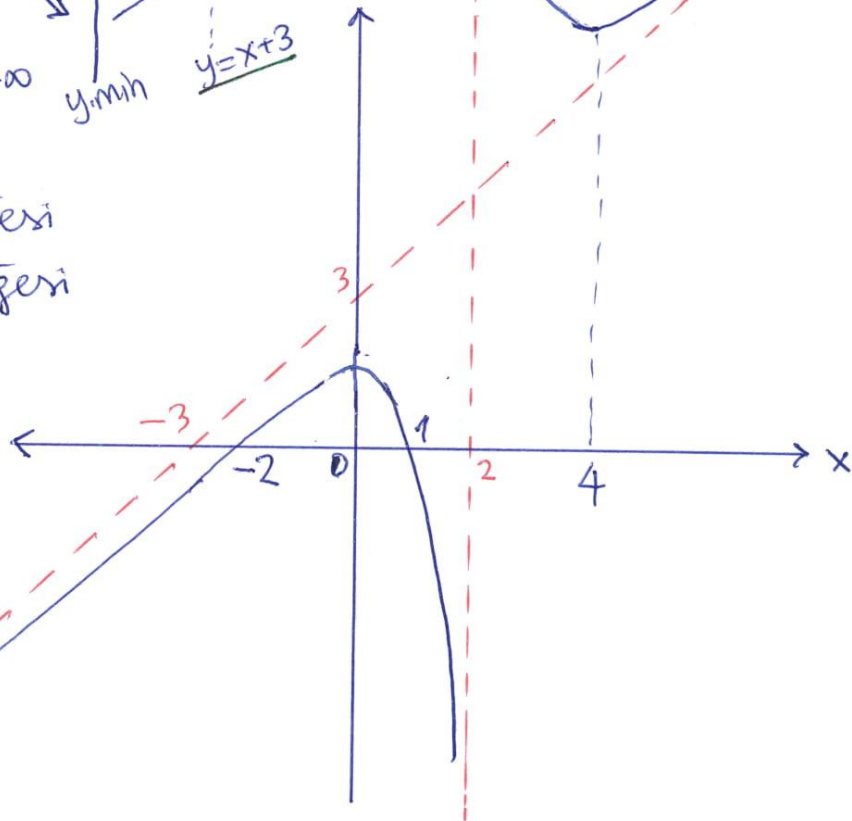
x	$-\infty$	0	2	4	$+\infty$
f'	+	0	-	0	+
f	$\nearrow$ $y=x+3$ $\searrow$ $y_{\max}$ $\searrow$ $-\infty$ $\searrow$ $+\infty$ $\searrow$ $y_{\min}$ $\nearrow$ $y=x+3$				

$f(0)=1$ y.max değeri

$f(4)=9$ y.min değeri

$f''(x) = 8/(x-2)^3$
olup tablosu

x	2
f''	0
f	$\curvearrowright$ $y=x+3$ $\curvearrowleft$



ÖR: $f(x) = \arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right)$ grafiğini çizelim.

1) $D_f = \{x \in \mathbb{R} : -1 \leq \frac{2x}{1+x^2} \leq 1\}$ için $(x-1)^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Rightarrow 2x \leq 1+x^2 \Rightarrow \frac{2x}{1+x^2} \leq 1 \Rightarrow D_f = \mathbb{R}$ dir.

2) f fonksiyonu $\mathbb{R}$ -nin tamamında sürekli olup $(0,0)$ -dan geçer. $f(-x) = \arcsin\left(\frac{-2x}{1+x^2}\right) = -\arcsin\left(\frac{2x}{1+x^2}\right) = -f(x)$ olduğundan tek fonksiyondur.

3) $D_f = \mathbb{R}$ old. dan dikey asimptotu yoktur. $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ olduğundan $y=0$ $\mp\infty$ kollarda yatay asimptot olur.

4) $f'(x) = \frac{2(1-x^2)}{(1+x^2) \cdot |1-x^2|}$ olup $\lim_{x \rightarrow 1^+} f'(x) = -1$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f'(x) = 1$

olup $f'(x)$, $x = \pm 1$ noktalarında yoktur.

x		-1		1	
f'	-	o	+	o	-
f	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

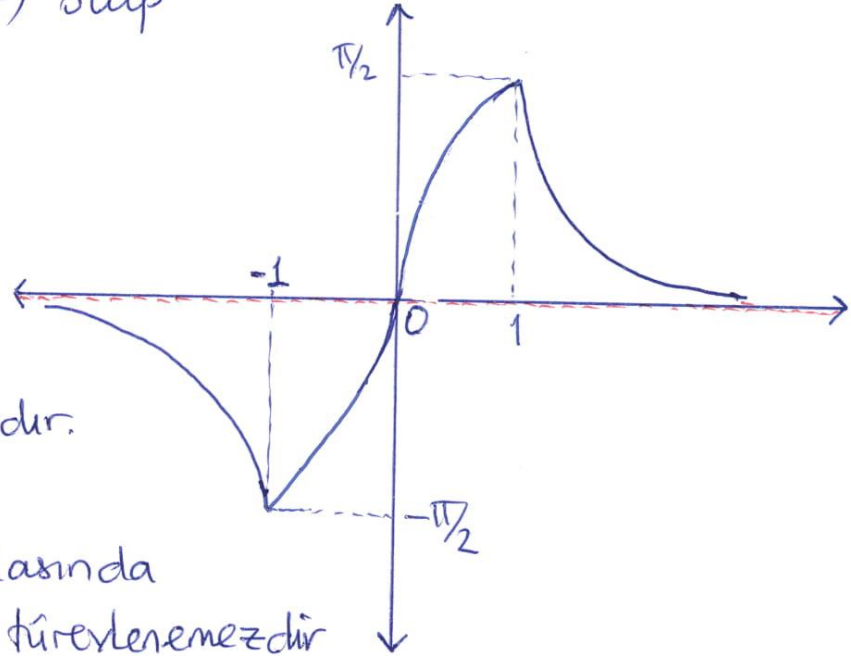
$A(-1, -\pi/2)$ yerel minimum $B(1, \pi/2)$ yerel maksimum noktasıdır.

$$f''(x) = \frac{-4x}{(1+x^2)^2} \cdot \text{Sgn}(1-x^2) \text{ olup}$$

x	-1	0	1
f''	-	+	-
f	↘	↗	↘

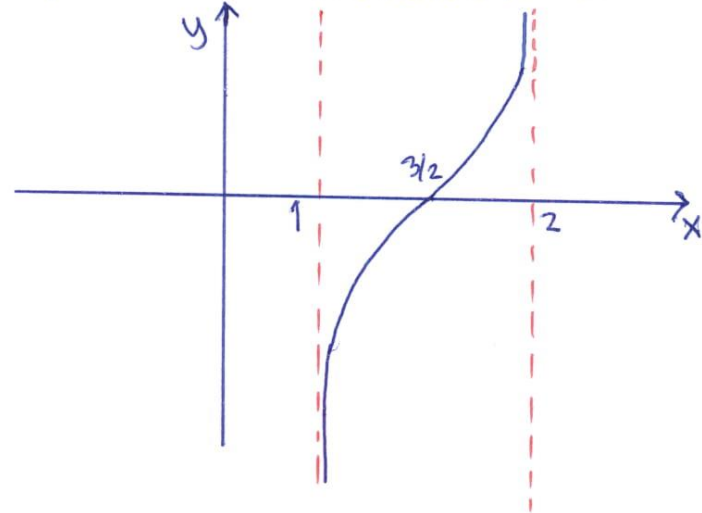
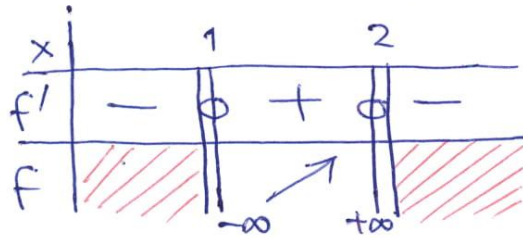
$x=-1, x=0, x=1$ apsisli noktalar dönüm noktasıdır.

* Fonksiyon $x=\pm 1$ noktasında sürekli olmasına rağmen türetilenemezdir



ÖR: $f(x) = \ln\left(\frac{x-1}{2-x}\right)$ grafiğini çizelim.

- 1) $Df = \left\{x \in \mathbb{R} : \frac{x-1}{2-x} > 0\right\} = (1, 2)$
- 2) $y=0$ için $x = 3/2$ olup $(3/2, 0)$ noktasından geçer.
- 3) $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^-} f(x) = +\infty$ olup $x=1$ sağdan, $x=2$ soldan dikey asimptottur. Yatay, eğri asimtot aranmaz.
- 4) $f'(x) = \frac{-1}{(x-1)(x-2)}$ olup $x=1, x=2$ kritik noktadır.





UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



8

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 6