



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II

Bükeylik, L' Hspital Kuralı ve Asimptotlar

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 5

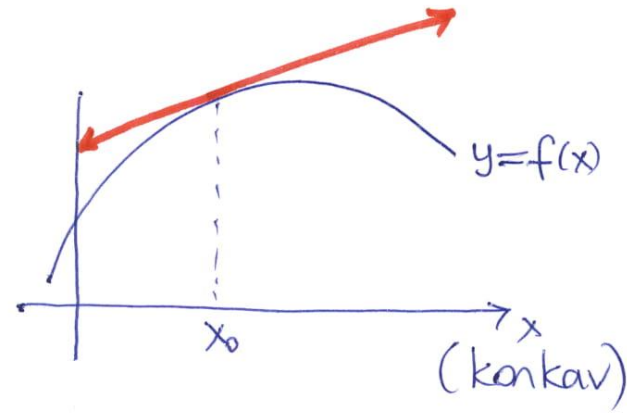
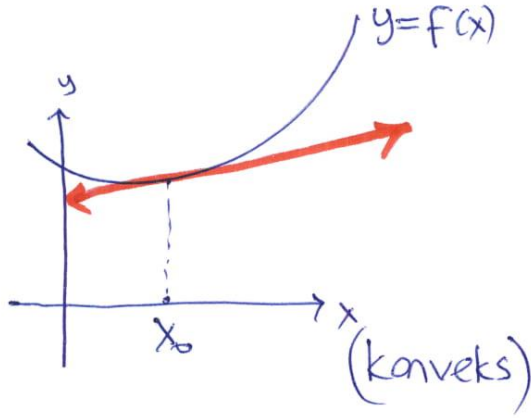
4.6. Büküklük, L'Hospital Kuralı ve Asimtotlar

Yerel ekstremumları bulmada kullanılan İkinci türev ile eğri çizimlerinde işimize yarayacak olan büküklüğü belirtmeyeceğiz.

4.6.1. Tanım:

x_0 noktasında türevlenebilir bir $f(x)$ fonksiyonu verilsin.

- (1) x_0 -ın bir delik komşuluğunda f -nin grafiği o noktadan çizilen teğetin üstünde kalıyorsa f -ye x_0 noktasında yukarı bükü (konveks),
- (2) x_0 -ın bir delik komşuluğunda f -nin grafiği, o noktadan çizilen teğetin altında kalıyorsa f -ye o noktada aşağı bükü (konkav),
- (3) Eğrinin büküklüğünün değiştiği noktada f ikinci mertebeden türevlenebilirse o noktaya dönüm noktası denir.



Eğer f fonksiyonu (a,b) aralığının her noktasında konveks (konkav) ise f -ye (a,b) aralığında konveks (konkav) denir.

Örneğin $f(x)=x^2$ fonksiyonu $\mathbb{R}$ -de (konveks) yığılması bütündür. $f(x)=x^3$ fonksiyonu $(-\infty,0)$ aralığında konkav, $(0,+\infty)$ aralığında konvektir.

4.b.2.Önerme: $f:(a,b) \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci mertebeden türevlenebilir bir fnk. olsun.

- (i) Her $x \in (a,b)$ için $f''(x) > 0$ ise $f, (a,b)$ -de konveks,
 (ii) Her $x \in (a,b)$ için $f''(x) < 0$ ise $f, (a,b)$ -de konkavdır.

İspat:

- (i) $y=f(x)$ fonksiyonu için $x \in (a,b)$ olmak üzere $f''(x) > 0$ olsun. Herhangi bir $x_0 \in (a,b)$ noktasında 2. dereceden

Taylor polinomunu yazarsak

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(c)}{2} (x-x_0)^2$$

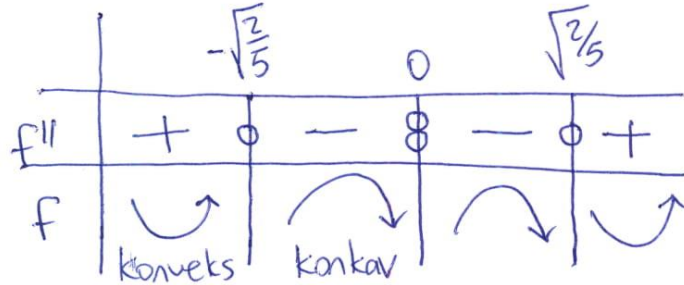
oş. $\exists c \in [x_0, x]$ vardır.

x_0 noktasından çizilen teğet doğrusu $\underbrace{f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x-x_0)}_{T(x)}$ olup $f''(c) \cdot \frac{(x-x_0)^2}{2} > 0$ old. dan

$f(x) - T(x) > 0$ olur. Bu ise f konveks demektir.

Sonuç: f fonksiyonu x_0 noktasında 2. mertebeden türevlenebilir ve x_0 bir dönüm (büküm) noktası ise $f''(x_0) = 0$ olur.

* Bu sonucun tersi genellikle doğru değildir. Örneğin $f(x) = x^6 - x^4$ fonksiyonu için $f'(x) = 6x^5 - 4x^3$ ve $f''(x) = 30x^4 - 12x^2$ olup $f''(x) = 0$ denkleminde $x_1 = x_2 = 0$, $x_3 = \sqrt{\frac{2}{5}}$, $x_4 = -\sqrt{\frac{2}{5}}$ bulunur. Buradan



olup $x=0$ noktası ilahî türevin kökü olmasına rağmen dönüm noktası değildir.

L'Hospital Kuralı: $\tilde{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ kümesinde $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}, \infty - \infty, 0 \cdot \infty, 0^0, 1^\infty$ ve ∞^0 ifadelerine belirsizlik denir. Limit alınırken karşılaştığımız bu belirsizlikler $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$ haline dönüştürülerek limit değeri hesaplanabilir.

4.b.3. Teorem ($\frac{0}{0}$ belirsizliği) $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ lü fonksiyon ve $a \in X'$ olsun.

1) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0,$

2) f, g fonksiyonları $\dot{U}_g(a)$ konsülüğünde türevlenebilir ve $\forall x \in \dot{U}_g(a)$ için $g'(x) \neq 0$ o.ş. $\exists \delta > 0$ var

3) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ limiti var

koşulları sağlanıyorsa $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$ dir.

İspat: $F(x) = \begin{cases} f(x), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases} \quad G(x) = \begin{cases} g(x), & x \neq a \\ 0, & x = a \end{cases}$

fonksiyonlarını tanımlayalım. (2) gereği $\forall x \in U_g(a)$ için $F'(x) = f'(x)$ ve $G'(x) = g'(x)$ dir. Ayrıca

$$\lim_{x \rightarrow a} F(x) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 = F(a)$$

(1) $\lim_{x \rightarrow a} G(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 = G(a)$ olup F, G fonksiyonları süreklidir.

O zaman F, G fonksiyonlarını $[a, x]$ aralığında düşünersek $[a, x]$ 'de sürekli; (a, x) -de türevlenebilir olup Genelleştirilmiş Lagrange Teo. sağlar. Yani

$$\frac{F(x) - F(a)}{G(x) - G(a)} = \frac{F'(c)}{G'(c)} \Rightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ o.ş. } \exists c \in (a, x)$$

vardır. $x \rightarrow a$ iken $c \rightarrow a$ gider olduğundan her ilmi

tarafın $x \rightarrow a$ limiti alınır

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} = \lim_{c \rightarrow a} \frac{f'(c)}{g'(c)} \text{ bulunur. Benzer}$$

işlemler $[x, a]$ aralığı içinde yapılabilir.

UYARI : L'Hospital Kuralı $x \rightarrow a^+$, $x \rightarrow a^-$, $x \rightarrow \pm\infty$ limitleri içinde geçerlidir. Ayrıca f ve g 'nin teoremden sağladığı özellikleri f' ve g' fonksiyonları sağlarsa tekrar L'Hospital uygulanabilir.

$$\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\arctan x}{x} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{1+x^2}}{1} = 1$$

$$\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\pi^2 - 4x^2} = \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{-\sin x}{-8x} = -\frac{1}{4\pi}$$

NOT: Diğer belirsizliklerde $\left(\frac{0}{0}\right)$ belirsizliğine dönüştürülürse L'Hospital uygulanabilir.

$$\begin{aligned}\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \left(\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1 \right) &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{\frac{x+1}{x-1}} - 1}{\frac{1}{x}} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left[\left(\frac{x+1}{x-1} \right)^{1/2} \right]'}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} \cdot \frac{x^2}{(x-1)^2} = 1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 3x + 2}{3x^3 - 7x^2 + 5x - 1} &= \left[\frac{0}{0} \right] = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2 - 3}{9x^2 - 14x + 5} = \left[\frac{0}{0} \right] \\ &= \lim_{x \rightarrow 1} \frac{6x}{18x - 14} = \frac{6}{4} \text{ olur.}\end{aligned}$$

4.b.4. Teorem ($\frac{\infty}{\infty}$ belirsizliği) : $X \subset \mathbb{R}$; $f, g: X \rightarrow \mathbb{R}$ iki fonksiyon ve $a \in X'$ olsun. Eğer (i) $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = \infty$
 (ii) $\dot{U}_g(a)$ komşuluğunda f, g fonksiyonları türevlenebilir ve
 $\forall x \in \dot{U}_g(a)$ için $g'(x) \neq 0$ o.ş. $\exists \delta > 0$ var (iii) $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$
 limiti var koşulları sağlanıyorsa

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} \text{ dir.}$$

İspat: $f(x) = \frac{1}{u(x)}$, $g(x) = \frac{1}{v(x)}$ alınarak 4.b.3. Teoremin ispatı tekrarlanabilir.

$$\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x-1}}{x^2} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{1}{2\sqrt{x-1}}}{2x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{4x\sqrt{x-1}} = 0$$

$$\text{ÖR: } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{1/x-2}{\sec \frac{\pi}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{\cos \frac{\pi}{x}}{x-2} = \left(\frac{0}{0} \right) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{+\sin \frac{\pi}{x} \cdot \frac{\pi}{x^2}}{1} \\ = \frac{\pi}{4}.$$

UYARI: $\infty - \infty$ ve $0 \cdot \infty$ belirsizlikleri cebirsel işlemlerle $\frac{0}{0}$ veya $\frac{\infty}{\infty}$ haline kolayca dönüştürülürken üstel belirsizlikler doğal logaritma yardımıyla önce $0 \cdot \infty$ haline dönüştürülür.

ÖR: $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = [0^0]$ olup $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = K$ diyelim.

Her iki tarafın $\ln$ -ni alınırsa

$$\ln K = \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x \right) \stackrel{\text{ln sürdülü}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln x =$$

$$= [0 \cdot \infty] = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln x}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{-\infty}{+\infty} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} \cdot -x^2 = 0$$

bulunur. $\ln K = 0 \Rightarrow K = e^0 = 1$ dir.

ÖR: $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^x = [\infty^0]$ olup $\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^x = M$ diyelim.

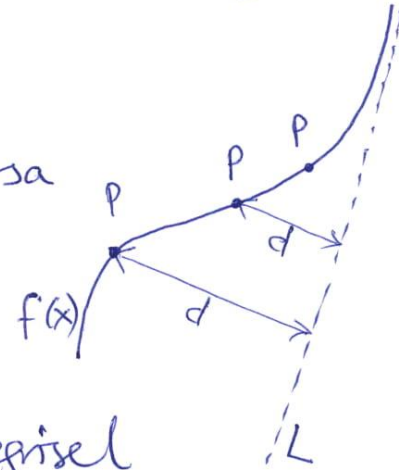
$$\begin{aligned} \ln M &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{2}{x}\right)^x \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \ln \left(\frac{2}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow 0^+} x \cdot \ln \left(\frac{2}{x}\right) = (0 \cdot \infty) \\ &= \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\ln \left(\frac{2}{x}\right)}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{\infty}{\infty}\right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{x}{2} \cdot \frac{-2}{x^2}}{-\frac{1}{x^2}} = 0 \text{ olup} \end{aligned}$$

$M = e^0 = 1$ dir.

ÖR: $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x = [1^\infty]$ olup bu limite S diyelim. Buradan

$$\begin{aligned} \ln S &= \ln \left(\lim_{x \rightarrow \infty} \left[\frac{3x-1}{3x+2}\right]^x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} \ln \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)^x = \lim_{x \rightarrow \infty} x \cdot \ln \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right) = \\ &= [\infty \cdot 0] = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln \left(\frac{3x-1}{3x+2}\right)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\frac{3}{3x-1} - \frac{3}{3x+2}}{-\frac{1}{x^2}} = -1 \text{ ile} \\ S &= e^{-1} \text{ olup.} \end{aligned}$$

Asimtotlar: $P(x, f(x))$, $y = f(x)$ fonksiyonunun grafiği üzerinde herhangi bir nokta ve L herhangi bir doğru (eğri) olmak üzere d , P noktasının L doğrusuna (eğrisine) uzaklığını gösterebilir. $x \rightarrow \infty$ için $d \rightarrow 0$ oluyorsa L -ye f -nin grafiğinin doğrusal (eğrisel) asimtotu denir.



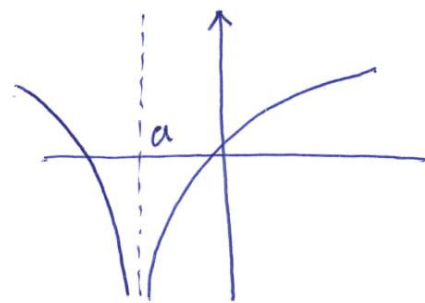
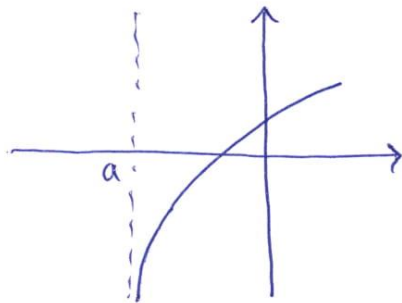
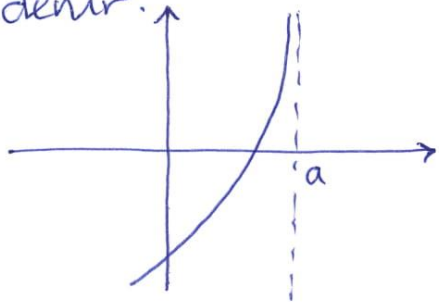
Asimtotlar dikey ve yatay-eğik-eğrisel olmak üzere üç grupta incelenir.

Tanım: Eğer

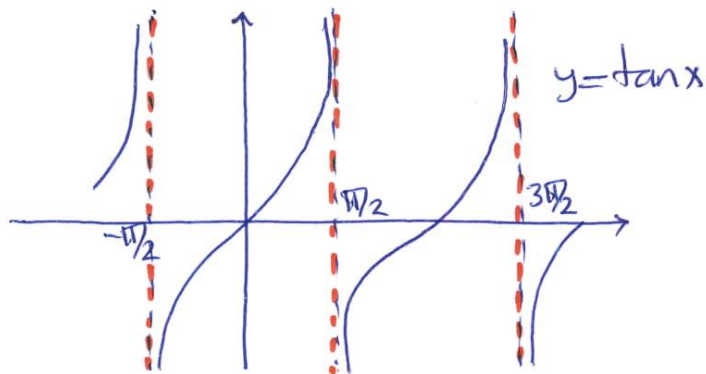
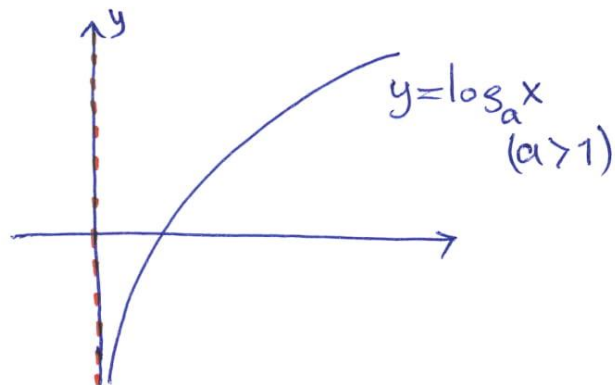
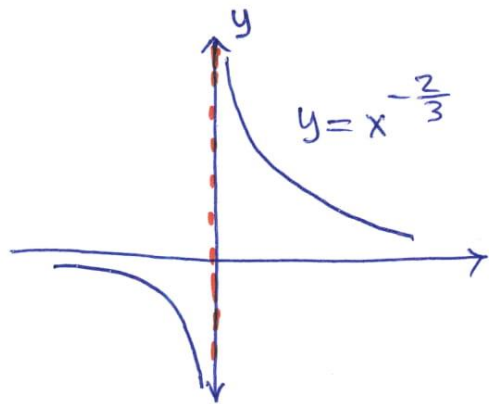
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \pm \infty$ ise $x = a$ doğrusuna sağdan dikey asimtot,

$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \pm \infty$ // // // soldan // //
denir.

- * Düşey asimtot olmak için sağdan veya soldan düşey asimtot olmak yeterlidir. Her ikisinde oluyorsa kısaca düşey asimtot denir.



- * Grafikler düşey asimtotları kesmez.
- * Bir fonksiyon grafiğinin birden fazla asimtotu olabilir.
- * Fonksiyonun düşey asimtotun olduğu noktası sonsuz sıçramalı süreksizlik noktasıdır.
- * Düşey asimtot tanım kümesinde olmayan noktalar arasında aranır.



→ $y = x^{-\frac{2}{3}}$ için $x=0$ dikey asimtot,

→ $y = \log_a x$ için $x=0$ dikey asimtot,

→ $y = \tan x$ için $x = (2k+1) \cdot \frac{\pi}{2}$ doğruları dikey asimtot olur.

ÖR: $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ için $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ olup $x=1, x=-1$

doğrusu dikey asimtot olabilir?

→ $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \frac{1}{2}$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{2}$ old. dan $x=1$ doğrusu dikey asimtot olamaz.

→ $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ old. dan $x=-1$ sağdan diğ. asimtot.

$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \frac{-2}{0^+} = -\infty$ " " " " soldan " "

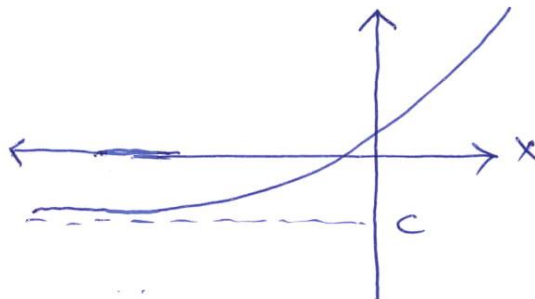
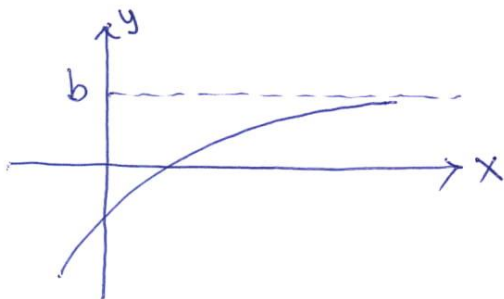
olur.

ÖR: $g(x) = 2^{\frac{5}{x-3}}$ için $D_g = \mathbb{R} \setminus \{3\}$ olup $x=3$ diğ. asim?

$\lim_{x \rightarrow 3^-} g(x) = \lim_{x \rightarrow 3^-} 2^{\frac{5}{x-3}} = 2^{-\infty} = 0$ olup soldan diğ.

asimtot değildir. $\lim_{x \rightarrow 3^+} g(x) = \infty$ olup sağdan dikey asimtot olur.

Tanım : Bir $f(x)$ fonksiyonu için D_f izin verdiği takdirde
 $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = b \in \mathbb{R}$ ise $y=b$ doğrusuna $+\infty$ kolda yatay
 asimtot; $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = c \in \mathbb{R}$ ise $y=c$ doğrusuna $-\infty$ kolda
 yatay asimtot denir.



Örneğin $f(x) = \ln\left(\frac{-x+1}{x+2}\right)$ için $D_f = (-2, 1)$ olup $+\infty$
 kollarda yatay asimtot aranmaz.

Yine $g(x) = \sqrt{x-2}$ için $D_g = [2, +\infty)$ olduğundan
 $-\infty$ kolda yatay asimtot aranmaz.

NOT: $+\infty$ veya $-\infty$ kolda yatay asimtot yoksa o kolda eğri asimtot vardır. $y = f(x)$ fonksiyonu için

(i) $\lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x) - h_1(x)] = 0$ o.ş. bir $h_1(x)$ fonk. u varsa $h(x) = e^{+\infty}$ kolda eğri asimtot denir.

(ii) $\lim_{x \rightarrow -\infty} [f(x) - h_2(x)] = 0$ o.ş. bir $h_2(x)$ varsa bu $h_2(x)$ fonksiyonuna $-\infty$ kolda eğri asimtot denir.

UYARI: Yatay asimtot varsa eğri asimtot aranmaz. Yatay asimtotun olmadığı kolda eğri asimtot aranır. Eğri asimtotları bulmak kolay değildir. Bazı durumlarda kolayca bulunabilir.

(1) $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ olmak üzere $P(x), Q(x)$ polinom iken

$\deg(P) > \deg(Q)$ olduğunda polinom bölmesi yapılır.

$f(x) = B(x) + \frac{K(x)}{Q(x)}$ yazılıp bölüm $B(x)$; $\pm\infty$ kollarında eğri asimtot olur.

(2) Eğer eğri asimtotları $h_1(x)$ ve $h_2(x)$; birer doğru ise eğri asimtot adını alır ve $h_1(x) = m_1x + n_1$, $h_2(x) = m_2x + n_2$ için

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n_1 = \lim_{x \rightarrow \infty} (f(x) - m_1x),$$

$$m_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x}, \quad n_2 = \lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - m_2x) \text{ ile bulunur.}$$

Örneğin; $f(x) = \frac{1}{x}$ için $y=0$ doğrusu $\mp\infty$ kolda yatay asimtot olur. Çünkü $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ dir.

$g(x) = \arctan x$ için $D_g = \mathbb{R}$ olup $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \frac{\pi}{2}$ ve $\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = -\frac{\pi}{2}$ olup $+\infty$ kolda $y = \frac{\pi}{2}$ ve $-\infty$ kolda $y = -\frac{\pi}{2}$ doğruları yatay asimtot olur.

$S(x) = 3^{x-1}$ için $D_S = \mathbb{R}$ olup $\lim_{x \rightarrow +\infty} S(x) = +\infty$,
 $\lim_{x \rightarrow -\infty} S(x) = 0$ olduğundan $y=0$ doğrusu $-\infty$ kolda yatay
 asimtot iken $+\infty$ kolda yatay asimtot yoktur ama eğri
 asimtot vardır.

$f(x) = \frac{4x^4}{4x^2-1}$ için $D_f = \mathbb{R} \setminus \{\pm \frac{1}{2}\}$ olup $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \infty$
 olduğundan yatay asimtot yoktur. Eğri asimtot vardır.
 Polinom bölmesiyle $f(x) = x^2 + \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{4}}{4x^2-1}$ old. dan
 $y = x^2 + \frac{1}{4}$ eğrisi $\pm\infty$ kollarda eğri asimtot olur.

$g(x) = 2x \cdot \arctan x$ için $D_g = \mathbb{R}$ olup $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} g(x) = \pm\infty$ old. dan
 $\pm\infty$ kollarda yatay asimtot yoktur.

Eğik asimtot var mı? $h_1(x) = m_1 x + n_1$, $h_2(x) = m_2 x + n_2$
 olmak üzere

$$m_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2x \cdot \arctan x}{x} = \pi$$

$$n_1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} [2x \arctan x - \pi x] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot x \left[\arctan x - \frac{\pi}{2} \right] =$$

$$= [\infty, 0] = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{[\arctan x - \frac{\pi}{2}]}{\frac{1}{x}} = \left(\frac{0}{0} \right) =$$

$$= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 \cdot \frac{1}{1+x^2} \cdot \frac{-x^2}{1} = -2 \text{ olup } h_1(x) = \pi x - 2$$

bulunur. Benzer yolla $h_2(x) = -\pi x - 2$ bulunur.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



22

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 5