



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



1

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

Analiz II

Mimum ve Maksimum Değerler
Rolle ve Lagrange Teoremi

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 4

4.4. Minimum ve Maksimum Değerler:

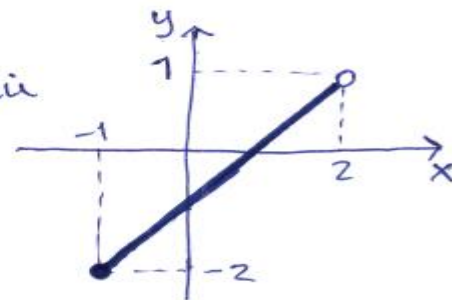
Tanım: Her $x \in D_f$ için $m = f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2) = M$ olacak şekilde $\exists x_1, x_2 \in D_f$ varsa bu noktalar sırasıyla mutlak minimum, mutlak maksimum noktası; m ve M sayılarına da mutlak minimum ve mutlak maksimum değeri denir.

Eğer $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sürekli bir fonksiyon ise Ekstremin değer teoremine göre f -nin mut. min. ve mut. maksimum değerleri vardır. Bu nedenle mutlak ekstremin değerleri araştırılırken sorunlar kapalı ve sınırlı aralıkta tanımlanmayan veya sürekli olmayan fonksiyonlara ilişkin olacaktır.

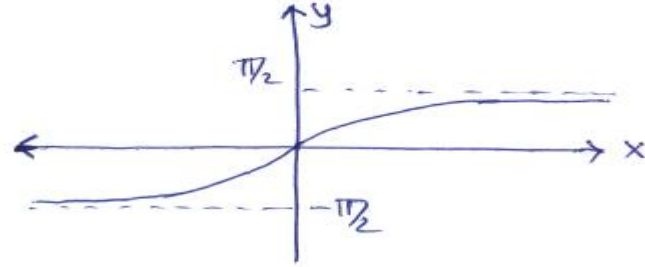
Tanım : $X \subset \mathbb{R}$, $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $c \in X$ olsun.
 Her $x \in U_\delta(c) \cap X$ için $f(x) \geq f(c)$ koşulunu sağlayan
 bir δ komşuluğu varsa c -ye yerel minimum noktası;
 her $x \in U_\delta(c) \cap X$ için $f(x) \leq f(c)$ koşulunu sağlayan
 bir $\delta > 0$ varsa c -ye yerel maksimum noktası denir.

Yerel minimum veya yerel ekstremum noktalara
 ekstremum nokta; bunların f altındaki değerine ise
 ekstremum değeri denir.

→ Örneğin $f: [-1, 2) \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - 1$ için
 f sürekli ama $[-1, 2)$ kapalı değildir.
 Mutlak minimum noktası -1 , mut. min.
 değeri -2 iken, mut. maksimum yoktur.



→ $f: \mathbb{R} \rightarrow (-\pi/2, \pi/2)$, $f(x) = \arctan x$ için $y = f(x)$

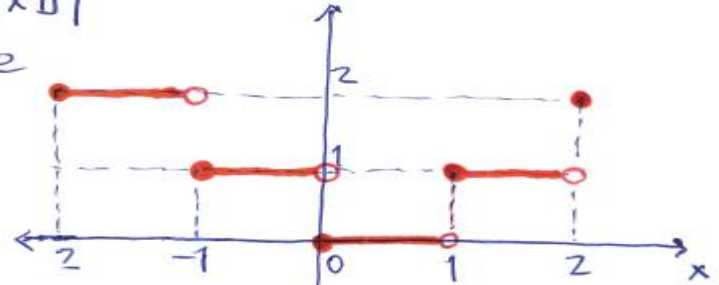


fonksiyonu $\mathbb{R}$ -de süreklidir,
sınırlıdır ama mutlak ekstremum
noktası yoktur.

→ $g: [-2, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = |\lceil x \rceil|$

fonksiyonunun grafiğine göre
mut. minimum değeri 0,
mut. maks. değeri ise 2'dir.

g sürekli olmayıp mutlak
minimum noktası $[0, 1)$
aralığındaki sonsuz nokta; mut. maks.
noktası ise $[-2, -1) \cup \{2\}$ noktasıdır.

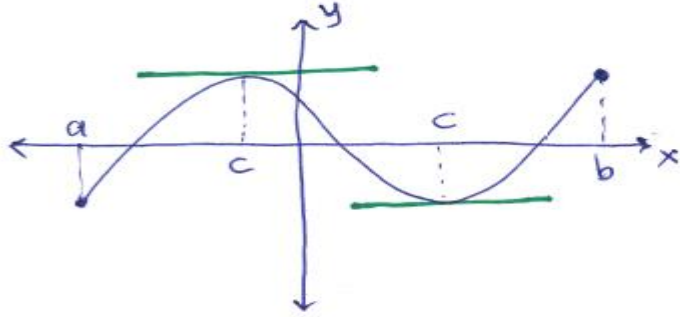


4.4.1. Teorem (Fermat): $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $c \in (a, b)$ noktasında bir yerel ekstremuma sahip ve f , c -de türevlenebilirse $f'(c) = 0$ dir.

İspat: Kabul edelimki $c \in (a, b)$ noktası bir yerel maksimum noktası olsun. f fonksiyonu c noktasında türevlenebilir olduğundan $\lim_{x \rightarrow c} \frac{f(x) - f(c)}{x - c}$ limiti var ve sonludur. Ayrıca $f'(c) = f'(c^+) = f'(c^-)$ dir. c bir yerel maksimum nokta olduğundan $\forall x \in U_g(c) \cap [a, b]$ için $f(x) \leq f(c)$ olup $\lim_{x \rightarrow c^+} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \leq 0$, $\lim_{x \rightarrow c^-} \frac{f(x) - f(c)}{x - c} \geq 0$ olacaktır. Bu ise $f'(c^+) \leq 0$, $f'(c^-) \geq 0$ demektir.

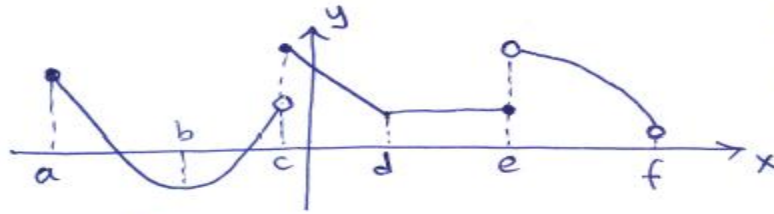
Buradan f türevlenebilir olduğundan $f'(c^+) = f'(c^-)$ olması gereği $f'(c) = 0$ dur. c noktasının bir yerel minimum nokta olması halinde benzer ispat yapılabilir.

Geometrik olarak; Fermat teoremine göre f fonk. u $c \in (a, b)$ noktasında türevlenebilir ve c bir T_f yerel ekstremum noktası ise c noktasından çizilen teğet x -eksenine paraleldir.



UYARI: Fermat teoreminin tersi doğru değildir. Yani $f'(c) = 0$ olması c noktasının yerel eks. nokta olmasını gerektirmez.
 $f(x) = (x-2)^3$ için $f'(2) = 0$ dur ama $x=2$ bir y. eks. nokta değildir.

UYARI: Yerel ekstremum noktasında fonksiyon türevlenebilir ise türev sıfırdır. Ama fonksiyonun türevlenemediği bazı noktalar yerel ekstremum noktası olabilir. Örneğin aşağıdaki grafiğe sahip $y = f(x)$ fonksiyonu için



* $Df = [a, f)$ aralığıdır.

* $S_f = [a, c) \cup (c, e) \cup (e, f)$ dir.

* c, e, f noktasında f süreksiz olup aynı zamanda

türevlenemezdir. Fakat $x = c$ noktası yerel maximum, $x = e$ noktası yerel minimum noktasıdır.

* Bunların yanı sıra $x = a$ noktası yerel maximum, $x = b, x = d$ noktası yerel minimum noktasıdır.

NOT: Bir f fonksiyonunun ekstremum noktasını belirlemek için aşağıdaki kritik nokta adı verilen noktası incelenmelidir:

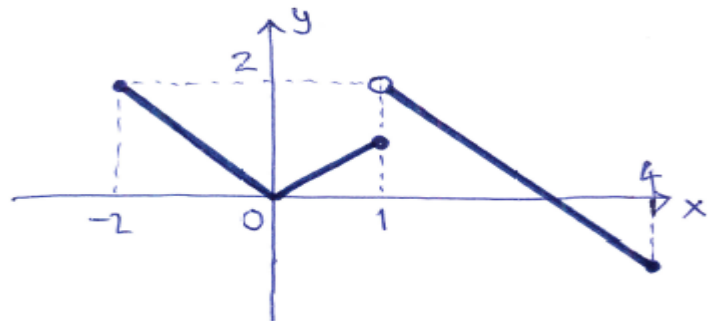
- (i) $f'(x) = 0$ denkleminin kökleri
- (ii) Türevlenemezlik noktası
- (iii) $D_f = [a, b], [a, +\infty), (-\infty, b], \dots$ şeklinde en az bir ucu kapalı ise bu aralıkların uç noktası

Örneğin ; (1) $f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x - 6$ için $f'(x) = 3x^2 - 4x - 5$ denkleminin kökleri

(2) $g: (-3\pi, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, g(x) = \sin x + \sqrt{x} \cdot \cos x$ için $g'(x) = \cos x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \cos x - \sqrt{x} \cdot \sin x$ den $g'(x) = 0$ denk. kökleri ve $x = \frac{\pi}{2}$ noktası kritik noktalardır.

$$(3) f: [-2, 4] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|, & -2 \leq x \leq 1 \\ -x+3, & 1 < x \leq 4 \end{cases}$$

fonksiyonunu alalım.



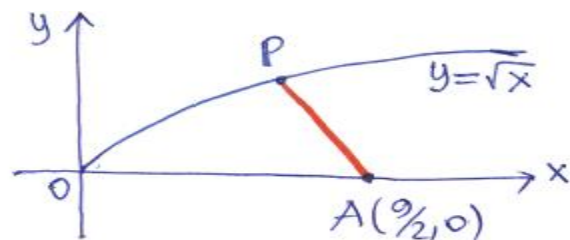
→ f fonksiyonu $x=0$, $x=1$ noktalarında türevleremezdir.

$$\rightarrow f'(x) = \begin{cases} -1, & x \in (-2, 0) \cup (1, 4) \\ 1, & x \in (0, 1) \end{cases}$$

olup $f'(x) = 0$ olmaz.

Sonuç olarak kritik noktalar; $x = -2$, $x = 4$ birleşik noktaları ve $x = 0$, $x = 1$ noktalarıdır.

(4) $y = \sqrt{x}$ eğrisinin $(\frac{9}{2}, 0)$ noktasına uzaklığını bulalım.



En yakın noktaya P dersek, P eğri üzerinde olduğundan $P(x, \sqrt{x})$ olmalıdır.

$$|AP| = \sqrt{\left(\frac{9}{2} - x\right)^2 + (\sqrt{x} - 0)^2} = f(x)$$

alınrsa f -nin minimum değerini bulmalıyız.

Bunun için

$$f'(x) = \frac{1}{2} \left(\left(\frac{9}{2} - x\right)^2 + x \right)^{-\frac{1}{2}} \left[2\left(\frac{9}{2} - x\right) \cdot (-1) + 1 \right] \Rightarrow f'(x) = 0$$

denkleminde $x=4$ bulunur. O zaman $|AP|$ -nin minimum değeri $f(4) = \frac{\sqrt{17}}{2}$ olur.

4.5. Rolle ve Lagrange Teoremleri :

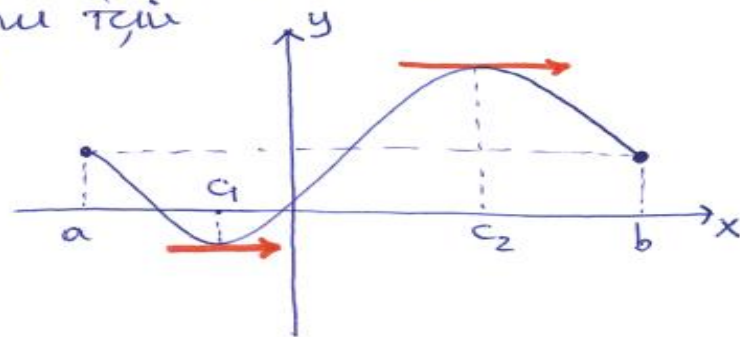
4.5.1. Rolle Teoremi: $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ üzerinde sürekli, (a, b) üzerinde türevlenebilir ve $f(a) = f(b)$ olsun. Bu takdirde $f'(c) = 0$ o.ş. $\exists c \in (a, b)$ noktası vardır.

İspat: f , $[a, b]$ üzerinde sürekli olduğundan ekstremum teoremine göre $[a, b]$ -de mut. min. ve mut. maksimum değerini alır. Mut. minimum değeri m , mut. maks. değeri M alırsak $m \leq M$ olduğundan $m < M$ yada $m = M$ dir.

* $m = M$ ise $\forall x \in [a, b]$ için $f(x) = m = M$ olup f sabit fonksiyondur ve $\forall x \in (a, b)$ için $f'(x) = 0$ olur.

* $m < M$ ise $f(a) = f(b)$ olduğundan fonksiyon m ve M değerlerini $x=a$, $x=b$ noktalarında alamaz. Yani fonksiyon bu değerlerin en az birisini bir $c \in (a,b)$ noktasında alır. f , $x=c$ noktasında türevlenebilir ve c bir yerel ekstremum noktası olduğundan Fermat teoremine göre $f'(c) = 0$ olur.

Geometrik olarak; $[a,b]$ -de sürekli, (a,b) -de türevlenebilir bir f fonksiyonu için $f(a) = f(b)$ ise bir $(c, f(c))$ noktasından çizilen teğet x -eksenine paralel o.ş.
 $\exists c \in (a,b)$ vardır.



4.5.2. Lagrange (Ortalama değer) Teoremi :

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a, b]$ -de sürekli ve (a, b) aralığında türevlenebilir olsun. Bu takdirde

$$f(b) - f(a) = f'(c) \cdot (b - a)$$

o.ş. $\exists c \in (a, b)$ vardır.

İspat: Bir g fonksiyonunu $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,
 $g(x) = f(a) - f(x) + \frac{x-a}{b-a} (f(b) - f(a))$ alalım.

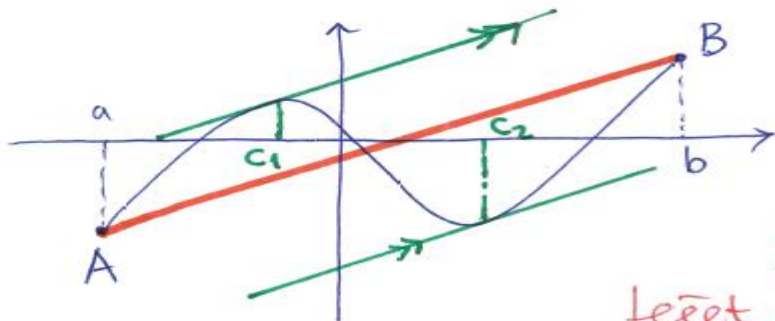
Bu g fonksiyonunun $[a, b]$ -de sürekli, (a, b) -de türevlenebilir olduğunu göstermek kolaydır. Ayrıca $g(a) = g(b)$ olup g fonksiyonu Rolle teoremini sağlar. Yani $g'(c) = 0$ o.ş. $\exists c \in (a, b)$ vardır. Bu ise

$$g'(x) = -f'(x) + \frac{1}{b-a} (f(b) - f(a)) \Rightarrow$$

$$g'(c)=0 \Rightarrow -f'(c) + \frac{1}{b-a} (f(b) - f(a)) = 0 \Rightarrow \frac{f(b) - f(a)}{b-a} = f'(c) \text{ bulunur.}$$

Geometrik olarak;

Lagrange teoreminin koşulları sağlandığında öyle bir $c \in (a, b)$ noktası vardır ki $(c, f(c))$ noktasından $y=f(x)$ fonksiyonunun grafiğine çizilen teğet; $A(a, f(a))$ $B(b, f(b))$ noktalarından geçen kırmızı paraleldir.



Kırmızı kirsin eğimi $\frac{f(b) - f(a)}{b-a}$ dir.

$f'(c)$ değeri ise c 'den geçen teğet doğrusunun eğimidir.

Lagrange Teoreminin Sonuçları:

$f: [a,b] \rightarrow \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. f , (a,b) -de türevlenebilir
 ve (i) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) = 0$ ise f sabit fonksiyondur.
 ve (ii) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) > 0$ ise f , (a,b) -de artandır.
 ve (iii) $\forall x \in (a,b)$ için $f'(x) < 0$ ise f , (a,b) -de azalandır.

İspat: (i) $\forall x \in (a,b)$ alalım. f , $[a,x]$ aralığında Lagrange teoremini sağladığından $f(x) - f(a) = f'(c) \cdot (x-a)$
 o.ş. $\exists c \in (a,x)$ vardır. $f'(c) = 0$ old. dan $f(x) = f(a)$
 yani f sabit bulunur.

(ii) $\forall x_1, x_2 \in (a,b)$ alalım ve $x_1 < x_2$ olsun. O zaman $[x_1, x_2] \subset (a,b)$ aralığında f Lagrange teoremini sağlar ve bundan dolayı

(*)----- $f(x_2) - f(x_1) = f'(c) \cdot (x_2 - x_1)$ o.ş. $\exists c \in (x_1, x_2)$ vardır.
Buna göre $f'(c) > 0$ ve $x_2 > x_1$ old. dan $f(x_2) > f(x_1)$ olup f artan bulunur.

(iii) (*) ifadesinden faydalananarak $f'(x) < 0$ ise $c \in (x_1, x_2)$ içinde $f'(c) < 0$ olup $f(x_2) < f(x_1)$ bulunur. Bu ise f azalan demektir.

NOT: Bu sonucun (i) şıkkının terside doğru olup (ii) ve (iii) şıklarının tersi kısmen doğrudur. Yani f , (a, b) -de artandır $\Rightarrow \forall x \in (a, b)$ için $f'(x) \geq 0$ ve f , (a, b) -de azalandır $\Rightarrow \forall x \in (a, b)$ için $f'(x) \leq 0$ dur.

Lagrange teoreminin sonucunu tablo ile gösterirsek

x					
$f'(x)$	+	+	+	+	+
$f(x)$	(ARTAN)				

x					
$f'(x)$	-	-	-	-	-
$f(x)$	(AZALAN)				

yazılabilir.

4.5.3. Önerme (Birinci Türev testi): f fonksiyonu bir I aralığının bir x_0 noktasında sürekli ve x_0 -in bir delik komşuluğunda türevlenebilir olsun. O zaman

- (1) x_0 -in sol komşuluğunda $f'(x) > 0$ ve sağ komşuluğunda $f'(x) < 0$ ise x_0 noktası bir yerel maks. noktadır.
- (2) x_0 -in sol komşuluğunda $f'(x) < 0$ ve sağ komşuluğunda $f'(x) > 0$ ise x_0 noktası bir yerel minimum noktasıdır.
- (3) x_0 -in delik komşuluğunun tamamında $f'(x) > 0$ yada $f'(x) < 0$ ise x_0 bir ekstremum noktası olamaz.

İspat : (1) x_0 -in sol komşuluğunda $f'(x) > 0$ ise Lagrange teo. ile f artan olup $\forall x \in U_\delta(x_0^-)$ için $f(x) \leq f(x_0)$ dir.
 x_0 -in sağ komşuluğunda $f'(x) < 0$ ise Lagrange teo. ile f azalan olup $\forall x \in U_\delta(x_0^+)$ için $f(x_0) \geq f(x)$ olur.
 Bu ise x_0 -in bir yerel maksimum noktası olduğu anlamına gelir.

(2) Benzer şekilde yapılabilir.

Bu önermeye göre

	x_0	
f'	+	-
f		

$y_{\max}$

	x_0	
$f'(x)$	-	+
f		

↘ ↗
 $y_{\min}$

4.5.4. Tanım: (Taylor açılımı - Lagrange Teo. genişletilmesi)

$f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonunun türevi $[a, b]$ aralığında sürekli ve $f': [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonu (a, b) -de türevlenebilir ise

$$f(b) - f(a) = f'(a) \cdot (b-a) + \frac{f''(c)}{2} (b-a)^2$$

o.ş. $\exists c \in (a, b)$ vardır.

Bu ifadeyi n -türeğe kadar sürdüreceğiz dursak,

$$f(x) = f(a) + f'(a) \cdot (x-a) + \frac{f''(a)}{2} (x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(c)}{n!} (x-a)^n$$

o.ş. $\exists c \in (a, x)$ vardır.

Bulunan bu ifadeye $f(x)$ fonksiyonunun a noktası civarındaki Taylor polinomu (n -dereceden) denir.

Özel olarak $a=0$ alınırsa bu açılıma Maclaurin açılımı (polinomu) denir. Yine $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ polinomunun x_0 noktasındaki Taylor açılımı yine $p(x)$ olup

$$p(x) = \sum_{k=0}^n \frac{p^{(k)}(x_0)}{k!} (x-x_0)^k$$

dir.

4.5.5. Teorem (Genelleştirilmiş Lagrange / Cauchy)

$f, g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ fonksiyonları $[a, b]$ -de sürekli, (a, b) -de türevlenebilir olsunlar. Bu takdirde

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(c) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(c)$$

o.ş. $\exists c \in (a, b)$ vardır.

İspat: $F: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) = [f(b) - f(a)] \cdot g(x) - [g(b) - g(a)] \cdot f(x)$$

sehilinde alınırsa F , $[a,b]$ -de sürekli ve (a,b) -de türevlenebilir. $F(a) = f(b) \cdot g(a) - f(a) \cdot g(b) = F(b)$ olduğundan F , Rolle teo. sağlar. Yani $F'(c) = 0$ o.ş. $\exists c \in (a,b)$ vardır. Böylece

$$0 = F'(c) = [f(b) - f(a)] \cdot g'(c) - [g(b) - g(a)] \cdot f'(c) \Rightarrow$$

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{o.ş. } \exists c \in (a,b) \text{ vardır.}$$

NOT: Genelleştirilmiş Ortalama değer teoremine göre $a < c < b$ olduğundan $\theta = \frac{c-a}{b-a}$ alınırsa $0 < \theta < 1$ olup

$$[f(b) - f(a)] \cdot g'(a + \theta(b-a)) = [g(b) - g(a)] \cdot f'(a + \theta(b-a))$$

yanılabılır.

4.5.b. Önerme (2. Türev testi) f , (a,b) aralığında türevlenebilir
ve $x_0 \in (a,b)$ için $f'(x_0) = 0$ olsun. Bu takdirde
(1) $f''(x_0) > 0$ ise x_0 bir yerel minimum noktası
(2) $f''(x_0) < 0$ ise x_0 // // maksimum noktasıdır.

İspat: (1) $f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f'(x)}{x - x_0} > 0$

olsun. O zaman $x < x_0$ ise $f'(x) < 0$ ve $x > x_0$ ise $f'(x) > 0$ olup x_0 bir yerel minimum noktasıdır.

		x_0	
f'	-	0	+
f	$\searrow$		$\nearrow$

(2) Benzer yol kullanılarak ispatlanabilir.



UZEM | ONDOKUZ MAYIS ÜNİVERSİTESİ
UZAKTAN EĞİTİM MERKEZİ



23

Ondokuz Mayıs Üniversitesi
Fen Edebiyat Fakültesi
Matematik Bölümü
Dijital Ders Platformu

TEŞEKKÜRLER..

Prof. Dr. İlker ERYILMAZ

Ders 4