Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Çok değişkenli ve reel-değerli fonk.lar için verdiğimiz kısmi türev tanımı çok-değerli fonk.lara genelleştirilebilir.

Eğer $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme olmak üzere

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$$

bir çok değerli fonk. ise, f nin her bir $j \in \{1, \ldots, m\}$ için f_j bileşen fonk.un bir x_j, $(j \in \{1, \ldots, n\})$ değişkenine göre $a \in E$ noktasında kısmi türevleri varolduğunda

$$f_{x_i}(a) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_j}(a), \ldots, \frac{\partial f_m}{\partial x_j}(a) \right)$$

biçiminde tanımlanan çok-değerli fonk.a $f : E \to \mathbb{R}^m$ çok-değerli fonk.un x_j değişkenine göre 'birinci mertebeden kısmi türevi' denir.

Yüksek mertebeden kısmi türevler ardışık olarak tanımlanır. Reel-değerli bir $f : E \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonk.un x_j ve x_k değişkenlerine göre türevi

$$f_{x_j x_k} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_j} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j} \right)$$

olarak tanımlanan fonk. dur, $j \neq k$ ise 'karışık türev' adını alır.

Benzer şekilde $r_1, \ldots, r_n$ negatif olmayan tamsayılar, $r = r_1 + \cdots + r_n$ ve $i_1, \ldots, i_p \in \{1, 2, \ldots, n\}$ olmak üzere, bir reel-değerli f fonk.un r-inci mertebeden kısmi türevlerini gösteren

$$\frac{\partial^r f}{\partial x_1^{r_1} \cdots \partial x_n^{r_n}} \quad \text{ve} \quad \frac{\partial^p f}{\partial x_{i_1} \cdots \partial x_{i_n}}$$

sembolleri hemen anlaşılabilir.

ÖRNEK. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$ fonk.u için $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm. $(x,y) \neq (0,0)$ olmak üzere

$$f_x(x,y) = \frac{y^2(x^2+y^2) - xy^2(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^4 - x^2y^2}{(x^2+y^2)^2} \quad \text{ve} \quad f_y(x,y) = \frac{2xy(x^2+y^2) - xy^2(2y)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2x^3y}{(x^2+y^2)^2}$$

olur.

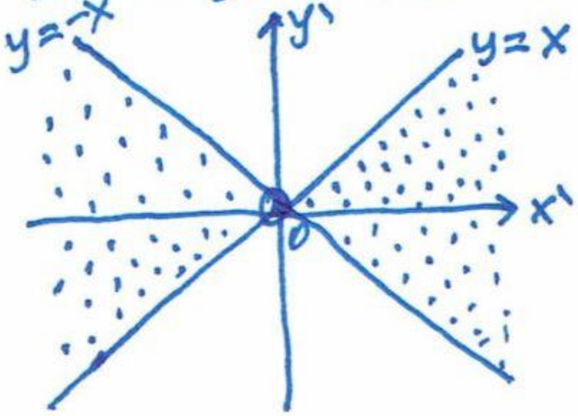
$$f_x(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f((0,0) + h(1,0)) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{f(h,0) - f(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{(0)}{h} = 0$$

$$f_y(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f((0,0)+h(0,1))}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(0)}{h} = 0$$

olur.

ÖRNEK. $f(x,y) = \ln(x^2+y^2) + \sqrt{x^2-y^2}$ fonkıun tanım kümesini bulunuz. Ayrıca bu kümenin iç noktalarında ikinci mertebeye kadar kısmi türevlerini hesaplayınız.

Çözüm. $x^2+y^2>0 \wedge x^2-y^2 \geq 0 \Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0) \wedge x^2 \geq y^2$
$\Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0) \wedge |y| \leq |x| \Leftrightarrow (x,y)\neq(0,0) \wedge [0\leq y\leq x \vee$
$(x\leq 0, y\geq 0, y\leq -x) \vee (x\leq 0, y\leq 0, x\leq y) \vee (x>0, y<0, y\geq -x)]$



olduğuna göre

$$D(f) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : 0\leq y\leq x \vee 0\leq y\leq -x \vee x\leq y\leq 0 \vee -x\leq y<0\} \setminus \{(0,0)\}$$

yazılır. $\forall (x,y)\in (D(f))^0$ için

$$f_x(x,y) = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{2x}{2\sqrt{x^2-y^2}} = \frac{2x}{x^2+y^2} + \frac{x}{\sqrt{x^2-y^2}}$$

$$f_y(x,y) = \frac{2y}{x^2+y^2} - \frac{y}{\sqrt{x^2-y^2}},$$

$$f_{xy}(x,y) = \frac{(0)(x^2+y^2) - 2x(2y)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(0)(\sqrt{x^2-y^2}) - x\left(-2y/2\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x^2-y^2}$$

ve

$$f_{xx}(x,y) = \frac{2(x^2+y^2) - 2x(2x)}{(x^2+y^2)^2} + \frac{(1)\sqrt{x^2-y^2} - x\left(2x/2\sqrt{x^2-y^2}\right)}{x^2-y^2}$$ olup,

benzer şekilde f_{yx} ile f_{yy} hesaplanabilir.

TANIM. Bir $f: A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ fonk.un $p \in A$ noktasında birinci mertebeden kısmi türevleri varsa, bu noktadaki gradyeni

$$\operatorname{grad} f(p) = \nabla f(p) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(p), \frac{\partial f}{\partial x_2}(p), \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}(p)\right)$$

biçiminde tanımlanır.

Türev kavramı tek değişkenli fonk.lar için tanımlanırken çok değişkenli fonk.larda gradyen onun yerini alır. Türev skaler değerli bir fonk. iken gradyen vektör değerlidir.

Türev gibi, gradyende fonk.un grafiğine teğetin eğimini temsil eder.

(36)

TANIM. $E \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $f: E \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. ve $r \in \mathbb{N}$ olsun.

Eğer her $k = 1, 2, \ldots, r$ için f nin k.ncı mertebeden kısmi türevleri var ve sürekli ise, f fonk.u 'E üzerinde C^r-sınıfındandır' denir. Bu sınıfa ait tüm fonk.ların kümesi $C^r(E)$ ile gösterilir.

Eğer her $r \in \mathbb{N}$ için $f \in C^r(E)$ ise f fonk.u 'E üzerinde C^∞-sınıfındandır' denir ve bu sınıftaki tüm fonk.ların kümesi $C^\infty(E)$ ile gösterilir.

Tek-değişkenli türev ve integralleri için bilinen her sonuç kısmi türev ve kısmi integraller için de geçerlidir. Örneğin 'Çarpım kuralı' gereğince $\frac{\partial f}{\partial x}$ ile $\frac{\partial g}{\partial x}$ varsa

$$\frac{\partial}{\partial x}(f \cdot g) = f \frac{\partial g}{\partial x} + g \frac{\partial f}{\partial x}$$

gerçekleşir.

(37)

Yine tek değişkenli fonksiyonlar için Lagrange ortalama değer teoremi kullanılırsa, $f(\cdot, y)$ fonk.u $[a,b]$ kapalı aralığı üzerinde sürekli ve $f_x(\cdot, y)$ kısmi türevi (a,b) açık aralığında var olduğunda, y değerine de bağlı olan bir $c \in (a,b)$ sayısının

$$f(b,y) - f(a,y) = (b-a)\frac{\partial f}{\partial x}(c,y)$$

olacak şekilde bulunabileceği görülür.

Ayrıca İntegral hesabın temel teoremine göre, $f(\cdot, y)$ fonk.u $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli ise

$$\frac{\partial}{\partial x}\int_a^x f(t,y)\,dt = f(x,y)$$

yazılabilir, ek olarak $f_x(\cdot, y)$ kısmi türev $[a,b]$ üzerinde varsa

$$\int_a^b \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\,dx = f(b,y) - f(a,y)$$

yazılır.

Bu aşamada hangi koşullar altında karışık kısmi türevlerin eşit olabildiklerini değerlendireceğiz. Önce aşağıdaki örnekte karışık kısmi türevlerin eşit olmayabileceğini görelim:

ÖRNEK. $f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0) \\ 0, & (x,y)=(0,0) \end{cases}$ fonk-u için

$f_{xy}(0,0)=-1\neq 1=f_{yx}(0,0)$ olduğunu gösteriniz.

Çözüm. $f_{xy}(0,0)=\lim\limits_{k\to 0}\dfrac{f_x(0,k)-f_x(0,0)}{k}$ dır. $(x,y)\neq(0,0)$ için

$$f_x(x,y)=y\,\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}+xy\,\frac{2x(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2x}{(x^2+y^2)^2}$$

olduğundan $f_x(0,k)=-k$ çıkar. Yine

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h}=0$$

olur. Buna göre

$$f_{xy}(0,0)=\lim_{k\to 0}\frac{-k-0}{k}=-1$$

bulunur.

Aynı şekilde

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h}$$

olup,

$$f_y(x,y) = x\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} + xy\frac{-2y(x^2+y^2)-(x^2-y^2)2y}{(x^2+y^2)^2},$$

$f_y(h,0) = h$ ve $f_y(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f(0,k)-f(0)}{h} = 0$ olduğundan

$$f_{yx}(0,0) = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

elde edilir.

13. Teorem. $E \subset \mathbb{R}^2$ bir açık alt küme, $(a,b) \in E$ ve $f : E \to \mathbb{R}$ bir fonk. olsun. Eğer f fonkiu E üzerinde C^1-sınıfından ve f nin karışık türevlerinden biri var olup, (a,b) noktasında sürekli ise, o zaman f nin (a,b) noktasında diğer karışık kısmi türevi de vardır ve

$$f_{xy}(a,b) = f_{yx}(a,b)$$

olur.

İspat. f_{yx} kısmi türevi E üzerinde var ve (a,b) noktasında sürekli olsun.

E nin açık olmasından dolayı $B((a,b),r) \subset E$ olacak şekilde bir $r>0$ seçebiliriz. $|h|<r/\sqrt{2}$, $|k|<k/\sqrt{2}$ olmak üzere

$$\Delta(h,k) = f(a+h, b+k) - f(a+h, b) - f(a, b+k) + f(a,b)$$

tanımını yapalım. Lagrange ortalama değer teoremine göre

$$f(a+h, b+k) - f(a+h, b) = k f_y(a+h, b+\theta k)$$

ve

$$f(a, b+k) - f(a,b) = k f_y(a, b+\theta k)$$

olacak şekilde $\theta \in (0,1)$ sayısı vardır. Böylece

$$\Delta(h,k) = k[f_y(a+h, b+\theta k) - f_y(a, b+\theta k)]$$

yazılır. Tekrar aynı teorem uygulanırsa,

$$\Delta(h,k) = hk[f_{yx}(a+\vartheta h, b+\theta k)]$$

olacak şekilde bir $\vartheta \in (0,1)$ vardır. f_{yx} karışık kısmi türev fonk.u (a,b) noktasında sürekli olduğundan

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{\Delta(h,k)}{hk} = \lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{yx}(a+\vartheta h, b+\theta k) = f_{yx}(a,b)$$

bulunur.

$$\Delta(h,k)=f(a+h,b+k)-f(a,b+k)-f(a+h,b)+f(a,b)$$

yazılışını dikkate alıp, Lagrange ort. değer teoremine göre

$$f(a+h,b+k)-f(a,b+k)=h f_x(a+\alpha h, b+k)$$

ve

$$f(a+h,b)-f(a,b)=h f_x(a+\alpha h, b)$$

olacak şekilde bir $\alpha\in(0,1)$ vardır. Buna göre

$$\Delta(h,k)=h[f_x(a+\alpha h, b+k)-f_x(a+\alpha h, b)]$$

yazılır. Tekrar aynı teorem uygulandığında,

$$\Delta(h,k)=hk[f_{xy}(a+\alpha h, b+\gamma h)]$$

olacak şekilde bir $\gamma\in(0,1)$ var olup, buradan

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=\lim_{(h,k)\to(0,0)} f_{xy}(a+\alpha h, b+\gamma h)=f_{xy}(a,b)$$

çıkar. O halde

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{\Delta(h,k)}{hk}=f_{yx}(a,b)=f_{xy}(a,b)$$

dir.

Aşağıdaki örnek son teoremin ikinci mertebeden kısmi türevlerin sürekli olması koşulunun kaldırılamayacağını söyler.

ÖRNEK. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $f(x,y) = \begin{cases} xy\,\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$

fonk.unu ele alalım.

Her $(x,y) \neq (0,0)$ için

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = xy\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial x}(x\,y)\cdot\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

$$= xy\,\frac{4xy^2}{(x^2+y^2)^2} + y\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right)$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = xy\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}(xy)\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

$$= -xy\cdot\frac{4x^2y}{(x^2+y^2)^2} + x\cdot\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

olur, buna göre

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right| \leq 2|xy|\frac{2|xy||y|}{(x^2+y^2)^2} + |y| \leq (1).(1).|y| + |y| = 2|y|$$

ve

$$\left|\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)\right| \leq 2|xy|\frac{2|xy|.|x|}{(x^2+y^2)^2} + |x| \leq (1).(1).|x| + |x| = 2|x|$$

bulunur. Bu eşitsizliklere göre

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = 0 \wedge \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0$$

elde edilir. Öte yandan

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0$$

ve

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{f(0,k)-f(0,0)}{k} = \lim_{k\to 0}\frac{0-0}{k} = 0$$

olduğundan $f \in C^1(\mathbb{R})$ dir.

Ayrıca

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) = \lim_{k \to 0} \frac{f_x(0,k) - f_x(0,0)}{k} = \lim_{k \to 0} \frac{-k-0}{k} = -1$$

ve

$$\frac{\partial^2 f(0,0)}{\partial x \partial y} = \lim_{h \to 0} \frac{f_y(h,0) - f_y(0,0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h-0}{h} = 1$$

olur.

Diferansiyellenebilme.

TANIM. $V \subset \mathbb{R}^n$ bir açık alt küme, $a \in V$ ve $f : V \to \mathbb{R}^m$ bir fonk. olsun. Eğer

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0 \qquad \ldots (1)$$

olacak şekilde bir $T_a : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü varsa, 'f fonk.u a noktasında diferansiyellenebilirdir' denir; T_a dönüşümü f'nin a noktasındaki 'tam türevi' adını alır.

NOT. Eğer $f: V \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ fonksiyonu a noktasında diferansiyellenebilirse, o zaman (1) eşitliğini sağlayan $T_a: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ dönüşümü tek türlü belirlidir.

ÇÖZÜM. Bir $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ lineer dönüşümü T_a yerine konduğunda, (1) eşitliği gerçekleşirse, $x \neq 0$ olmak üzere $u > 0$ için $h = ux$ alındığında $\lim_{u \to 0^+} h = 0$ olup, F ile T_a nın liner ve (1) eşitliğinden

$$\lim_{u \to 0^+} \frac{uF(x) - uT_a(x)}{u\|x\|} = \lim_{u \to 0^+} \frac{F(h) - T_a(h)}{\|h\|}$$

$$= \lim_{u \to 0^+} \frac{F(h) - f(a+h) + f(a)}{\|h\|} + \lim_{u \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a) - T_a(h)}{\|h\|} = 0$$

ve böylece $(F(x) - T_a(x))/\|x\| = 0 \Rightarrow F(x) = T_a(x)$ $(\forall x \neq 0)$ bulunur. Ayrıca F ve T_a lineer olduklarından $T_a(0) = F(0)$ dır. O halde $\mathbb{R}^n$ üzerinde $T_a = F$ dir #

UZEM

Fırsatlar Sunar

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Analiz IV Ders Notları

Prof. Dr. Cenap DUYAR